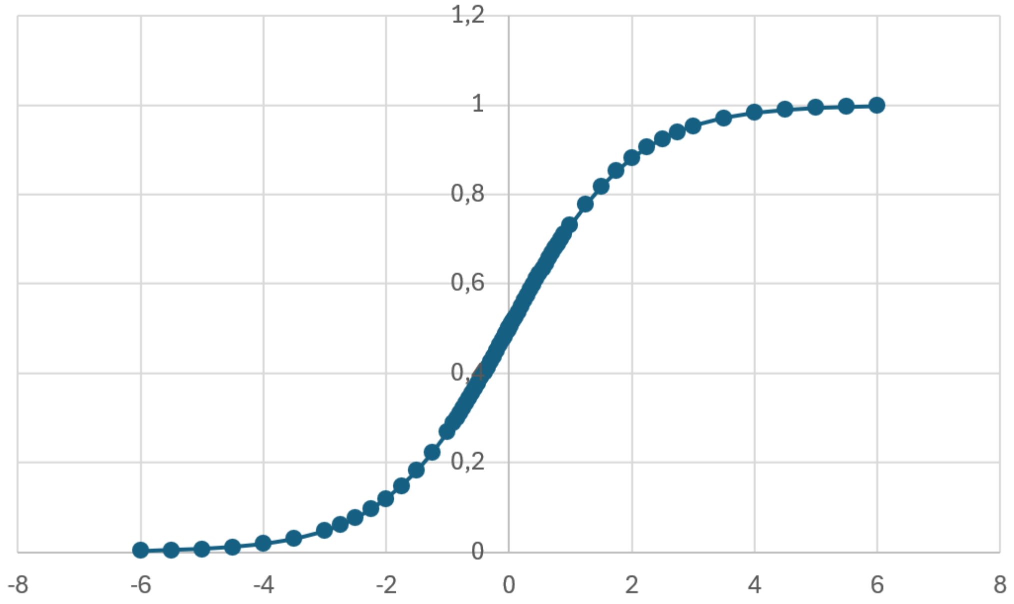
S-křivky

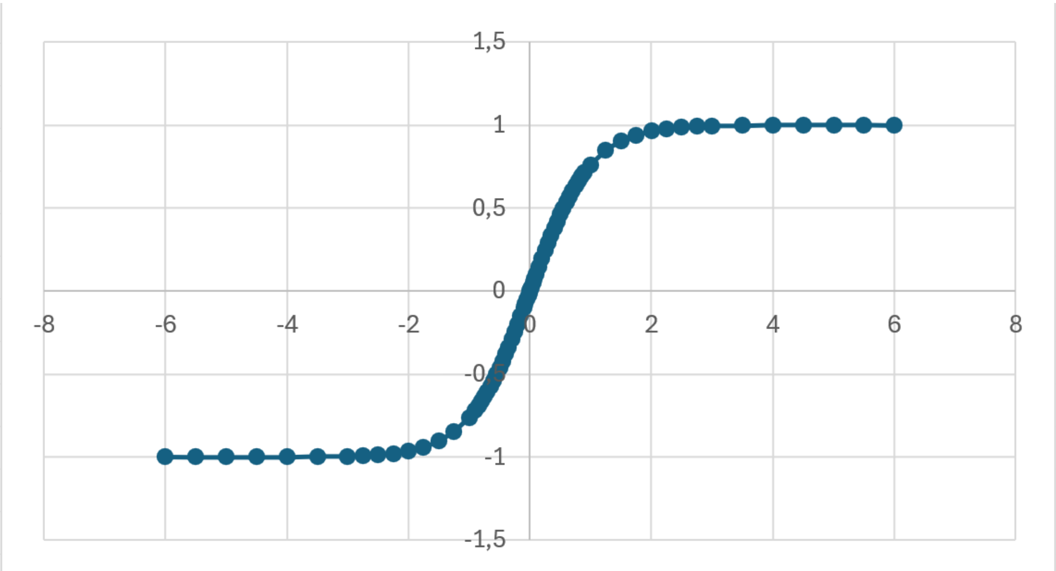
S-křivky jsou křivky, které při vhodném umístění[1] ve směru osy x vyjadřují grafy rostoucích funkcí zobrazujících množinu $\mathcal{R}$ všech reálných čísel na interval (a, b), konvexních na intervalu $(-\infty, 0\rangle$, konkávních na intervalu $\langle 0, \infty)$, středově symetrické kolem bodu $[0, (a + b)/2]$.

Příklady S-křivek:

a) graf logistické funkce

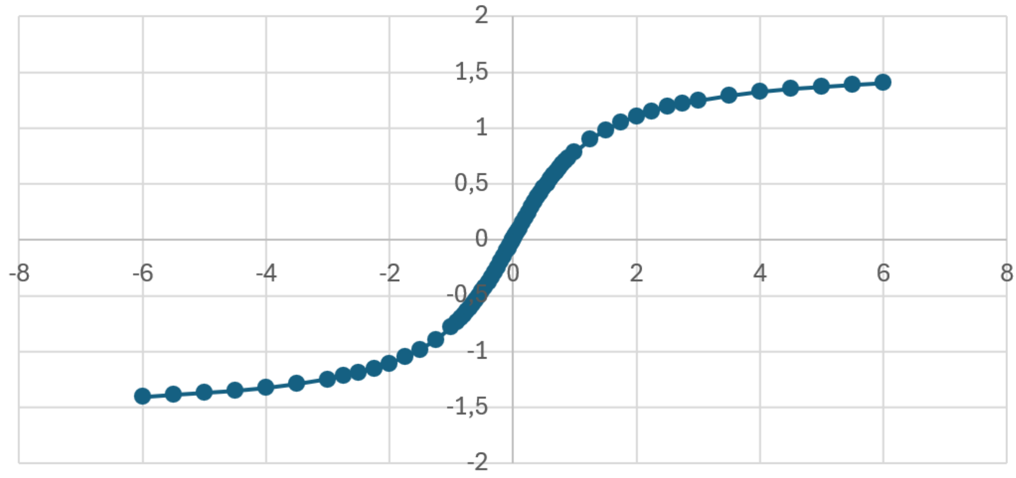


b) graf funkce hyperbolický tangens



[1] Viz poznámku u analytického vyjádření logistické funkce.

c) graf funkce arkustangens



Grafy připomínají velké tiskací S, odtud název S-křivky.

Zastavme se u funkcí, jejichž grafy jsou s-křivkami znázorněny. Připomínám, že měřítko na osách není stejné; není tomu tak z iniciativy mé, nýbrž z té excelové (či excelentní?).

■

a) $y = \exp x / (\exp x + 1) =_{\mathrm{df}} \operatorname{logist} x$

$\mathcal{D}$ (logist) = $\mathcal{R}$ $\mathcal{H}$(logist) = (0; 1), [2]

logist je rostoucí funkce, graf symetrický kolem [0; 1/2] (tedy logist x −1/2 je lichá funkce),

logist' x = exp x / (exp x +1)^2; logist' 0 = 1/4

Poznámka: Střed symetrie S-křivky nemusí mít x-souřadnici rovnou 0; S-křivkou je např. také graf funkce $y = 2.\exp x / (\exp x + 2)$, která zobrazuje množinu $\mathcal{R}$ na interval (0; 2); středem symetrie grafu této funkce je bod [ln 2 ; 1].

⊙

b) $y = \operatorname{th} x = (\exp x - \exp(-x))/(\exp x + \exp(-x))$ (Blíže viz čl. [1])

$\mathcal{D}$ (th) = $\mathcal{R}$ $\mathcal{H}$(th) = (-1; 1)

th je rostoucí lichá funkce,

th' $x = 1/\operatorname{ch}^2 x$; th' 0 = 1

⊙

c) $y = \operatorname{arctg} x$

$\mathcal{D}$ (arctg) = $\mathcal{R}$ $\mathcal{H}$(arctg) = (-π/2; π/2)

arctg je rostoucí lichá funkce

arctg' $x = 1/(1 + x^2)$, arctg' 0 = 1

■

[2] $\mathcal{D}$ značí definiční obor, $\mathcal{H}$ obor hodnot, $\mathcal{R}$ množinu všech rteálných čísel

Platí

$$\text{logist } x = (1/2)\,(\text{th}\,(x/2) + 1)$$

Znamená to, že funkce logist a th se chovají podobně, liší se jen měřítkem na souřadnicových osách a polohou středu souměrnosti grafu ([0; 1/2], resp. [0; 0]).

⊙

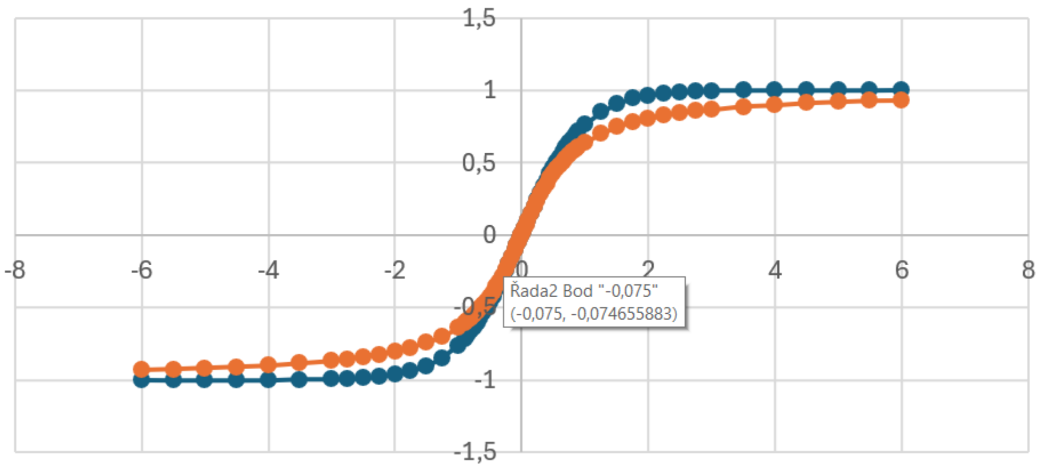
Definujme funkci arctgnorm $x = (2/\pi)\,\text{arctg}\,(\pi x/2)$

$\mathcal{D}$ (arctg) = $\mathcal{R}$ $\mathcal{H}$(arctg) = (-1; 1)

arctgnorm je rostoucí lichá funkce

arctgnorm' $x = 1/(1 + (\pi x/2)^2)$, arctg' 0 = 1

Zaměřme se na porovnání funkcí th a arctgnorm. Víme, že arctg a arctgnorm se liší jen měřítky na osách; podobně je tomu s funkcemi th a logist s tím, že středem souměrnosti grafu funkce logist není bod [0; 0], nýbrž [0;1/2]. Definičním oborem obou sledovaných funkcí th a arctgnorm je množina $\mathcal{R}$ všech reálných čísel (to je ostatně nutná vlastnost funkcí, jejichž grafem jsou s-křivky), oborem hodnot otevřený interval (-1; 1) a obě jsou liché (tedy v bodě 0 mají hodnoty rovné 0) a jejich derivace v bodě 0 je rovna 1. Následující obrázek ukazuje jejich grafy; th je vyznačen zeleně a arctgnorm oranžově:



Pro vybrané nezáporné hodnoty argumentu *x* jsou hodnoty obou funkcí uvedeny i v tabulce; omezení na nezáporné hodnoty neznamená žádnou újmu, neboť jde o liché funkce.

x	th (x)	arctgnorm (x)
0	0,000	0,000
0,01	0,010	0,010
0,025	0,025	0,025
0,05	0,050	0,050
0,1	0,100	0,099
0,15	0,149	0,147
0,2	0,197	0,194
0,25	0,245	0,238
0,3	0,291	0,280
0,4	0,380	0,357
0,5	0,462	0,424
0,6	0,537	0,481
0,75	0,635	0,552
1	0,762	0,639
1,25	0,848	0,700
1,5	0,905	0,744
1,75	0,941	0,778
2	0,964	0,804
2,5	0,987	0,841
3	0,995	0,867
3,5	0,998	0,885
4	0,999	0,900
4,5	1,000	0,911
5	1,000	0,919
5,5	1,000	0,927
6	1,000	0,933
7	1,000	0,942
8	1,000	0,949
9	1,000	0,955
10	1,000	0,960
20	1,000	0,980
50	1,000	0,992
100	1,000	0,996
200	1,000	0,998
500	1,000	0,999

Obrázek i tabulka naznačují, že th se k asymptotám blíží rychleji než arctgnorm. Dále ukážeme, že jde o vlastnost, jíž se studované funkce liší výrazně. Počítejme velikost plochy vymezené grafem funkce f, osou y a asymptotou $y = 1$, tedy

$$\int_0^\infty \big(1 - f(x)\big)\, dx,$$

a to jak pro funci $f = \text{th}$, pak pro $f = \text{arctgnorm}$.

⊙

Nejdříve položme $\boldsymbol{f} = \textbf{th}$. V článku [1] je uvedeno, že $\int \text{th}\, x\, dx = \ln \text{ch}\, x$ (vztah (6.3), jde nám o výpočet určitého integrálu, a proto aditivní konstantu C zde nevyjadřujeme), a tak

$$\int_0^\infty \big(1 - \text{th}\, x\big)\, dx = [x - \ln \text{ch}\, x]_0^\infty .$$

V dolní mezi, tedy pro $x = 0$, jsou menšenec i menšitel rovny 0 (ch 0 = 1; ln 1 = 0), a tedy

$$\int_0^\infty \big(1 - \text{th}\, x\big)\, dx = \lim_{x\to\infty} \big(x - \ln \text{ch}\, x\big).$$

Zde jde o neurčitý výraz $\infty - \infty$. Označme tuto limitu w; počítejme

$$\exp w = \lim_{x\to\infty} \exp \big(x - \ln \text{ch}\, x\big) = \lim_{x\to\infty} \big(\exp x \,/\, \exp \ln \text{ch}\, x\big) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \big(\exp x \,/\, \text{ch}\, x\,\big) = \big(\lim_{x\to\infty} e^x \,/\, ((e^x + e^{-x})/2)\big) = 2,$$

a tedy

$$w = \int_0^\infty \big(1 - \text{th}\, x\big)\, dx = \ln 2.$$

Velikost plochy vymezené grafem funkce th, osou y a asymptotou $y = 1$ tedy je **konečná** a má hodnotu **ln 2**.

Nechť nyní $\boldsymbol{f} = \textbf{arctgnorm}$. Počítejme tedy

$$\int_0^\infty \big(1 - \text{arctgnorm}\, x\big)\, dx = \int_0^\infty \big(1 - (2/\pi)\, \text{arctg}\, (\pi x/2)\big)\, dx = \mathcal{A}$$

Použijeme substituční metodu pro určitý integrál; při lineární substituci $t = \pi x/2$, tedy $x = 2t/\pi$, $dx = (2/\pi)\, dt$ meze 0 a ∞ zůstávají beze změny. Pokračujme tedy ve výpočtu (výpočet primitivní funkce k funkci arctg je naznačen v textu [2] na str. 3 a 4).

$$\mathcal{A} = \int_0^\infty \big(1 - (2/\pi)\, \text{arctg}\, t\big)\, (2/\pi)\, dt = (2/\pi) \int_0^\infty \big(1 - (2/\pi)\, \text{arctg}\, t\big)\, dt =$$

$$= (2/\pi)\, [t - (2/\pi)\, \big(t\, \text{arctg}\, t - (1/2) \ln (1 + t^2)\big]_0^\infty =$$

$$= (2/\pi)\, [t\, \big(1 - (2/\pi)\, \text{arctg}\, t\big) + (1/\pi) \ln (1 + t^2)]_0^\infty = \mathcal{B}$$

Dosazení dolních mezí ve výrazu $\mathcal{B}$ vede k nulovým hodnotám. Počítejme limity obou sčítanců nekonečnu:

$$\lim_{t\to\infty} t\, \big(1 - (2/\pi)\, \text{arctg}\, t\big) = \lim_{t\to\infty} \big(1 - (2/\pi)\, \text{arctg}\, t\big)/t^{-1} = \mathcal{C}$$

Výraz jsme přepsali tak, aby šlo o výpočet limity neurčitého výrazu typu 0/0 a mohli jsme použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\mathcal{C} = \lim_{t\to\infty} \big(-(2/\pi)/(1 + t^2)\big)/(-1/\, t^2) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \big((2/\pi)/(1 + t^{-2})\big) = 2/\pi$$

Pro druhý sčítanec platí

$$\lim_{t\to\infty} (1/\pi) \ln (1 + t^2) = \infty,$$

a tedy

$$\int_0^\infty (1 - \operatorname{arctgnorm} x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Zatímco velikost plochy vymezené grafem funkce th, osou y a asymptotou $y = 1$ je konečná a je rovna ln 2, tak velikost plochy vymezené grafem funkce arctgnorm, osou y a asymptotou $y = 1$ konečná není. Tím se funkce th a arctgnorm ***výrazně liší***. Vzhledem k tomu, co jsme zmínili o vztahu funkcí logist a th, a pak o vztahu arctgnorm a arctg; plocha vymezená asymptotou, osou y a grafem funkce logist má konečnou velikost, zatímco plocha vymezená asymptotou, osou y a grafem funkce arctg konečnou velikost nemá.

Praha, 14.2.2024

Literatura

[1] Nečas, J.: Hyperbolické a hyperbolometrické funkce. In: Mundus Symbolicus 26, 2018, s. 19

[2] Nečas, J.: https://jirinecas.jetmouse.cz/matematika/4MM101_2020jaro_cv.09-2.pdf