

Odmocnina z matice řádu 2

Jsem stařec, matematik v.v., nicméně stále mám matematiku rád, avšak nejsem s to tvořit nic jiného než psát pro disk (dříve se říkalo "pro šuplík"). Hledání odmocnin z matice mě zaujalo. Nevzpomínám si, že bych někdy o něm četl (je to ovšem mnohem slabší tvrzení, než kdybych říkal, že jsem o něm nikdy nečetl). Vzhledem k věku (blíží se mi krásné jubileum v mé oblíbené úsporné trojkové soustavě – psáno před začátkem adventu 2025) a zdravotnímu stavu (vyjádřenému diagnózou, cítím se ovšem docela dobře), dávám text na web, i když bych se rád k němu ještě vracel, doplnil ilustračními příklady a třeba i něco opravil. Rád bych vnesl i více pořádku do číslování "vzorců". Případné připomínky mi můžete psát na e-adresu JiNe1944@centrum.cz

RNDr. Jiří Nečas

Nechť $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Odmocninou z matice P nazveme každou takovou

matici $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$, pro niž $X^2 = P$.

K dané matici P (v celém článku se omezíme na *matice druhého řádu nad tělesem reálných čísel*) nemusí existovat žádná odmocnina, může existovat nenulový konečný počet¹ odmocnin i nekonečně mnoho odmocnin. Čísla p, q, r, s budeme nazývat *prvky matice P* . Vyjádříme nyní pomocí prvků matice X^2 :

$$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yu & y(x+v) \\ u(x+v) & v^2 + yu \end{pmatrix} \quad (1)$$

Abychom k dané matici P našli její odmocniny X , budeme řešit soustavu 4 nelineárních rovnic

$$x^2 + yu = p \quad (A) \quad y(x+v) = q \quad (C)$$

$$u(x+v) = r \quad (B) \quad v^2 + yu = s \quad (D)$$

o 4 neznámých x, y, u, v .

Z věty o násobení determinantů plyne, že $\det P = (\det X)^2$, což znamená, že nutnou podmínkou, aby existovala odmocnina z matice P , je, že $\det P \geq 0$.

Pokud $\det P = 0$, je matice P singulární, v opačném případě je regulární.

Zabývejme se nejdříve odmocninami ze singulárních matic a potom přejdeme k odmocninám z regulárních matic s kladným determinantem. Odmocnina ze singulární matice je singulární, odmocnina z regulární matice je regulární.

¹ Ten je vždy sudý

A. Odmocnina ze singulární matice řádu 2

Matice $\mathbf{P}$ je singulární, právě když její determinant $ps - qr = 0$, což znamená $ps = qr$. Pak ovšem je nulový i determinant odmocniny $\mathbf{X}$ z matice $\mathbf{P}$, to znamená

$$xv = yu. \quad (2)$$

Pomocí této rovnosti upravíme rovnice (A) a (D):

$$x^2 + xv = p \quad (\text{A0}) \qquad y(x+v) = q \quad (\text{C})$$

$$u(x+v) = r \quad (\text{B}) \qquad v^2 + xv = s, \quad (\text{D0})$$

tedy

$$x(x+v) = p \quad (\text{A1}) \qquad y(x+v) = q \quad (\text{C1})$$

$$u(x+v) = r \quad (\text{B1}) \qquad v(x+v) = s. \quad (\text{D1})$$

Sečtením rovnic (A1) a (D1) dostaneme

$$(x + v)^2 = p + s,$$

tedy

pokud $p + s < 0$, odmocnina z matice $\mathbf{P}$ neexistuje,

pokud $p + s > 0$, musí platit $x + v = \delta\sqrt{(p + s)}$, kde $\delta = \pm 1$,

pokud $p + s = 0$, je také $x + v = 0$.²

A1. Zabývejme se nejdříve případem $p+s > 0$. Platí $x + v = \delta\sqrt{(p + s)}$.

Ze vztahů (A1) až (D1) dostaneme:

$$x = p/(\delta\sqrt{(p + s)}) \quad (\text{A2}) \qquad y = q/(\delta\sqrt{(p+s)}) \quad (\text{C2})$$

$$u = r/(\delta\sqrt{(p + s)}) \quad (\text{B2}) \qquad v = s/(\delta\sqrt{(p+s)}) \quad (\text{D2})$$

To znamená

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} p/(\delta\sqrt{(p + s)}) & q/(\delta\sqrt{(p + s)}) \\ r/(\delta\sqrt{(p + s)}) & s/(\delta\sqrt{(p + s)}) \end{vmatrix}, \quad (3)$$

tedy

$$\mathbf{X} = \pm(1/\sqrt{(p + s)}) \mathbf{P} \quad (3')$$

A2. Přejděme nyní k případu, kdy $p + s = 0$. Nechť nejdříve $p = s = 0$.

Soustava rovnic (A1) až (D1) tedy bude vypadat

² Součtům prvků v hlavní diagonále se říká *stopa matice*. V tomto článku se o vlastnosti stopy nebudeme opírat.

$$x(x + v) = 0 \quad (\text{A3})$$

$$y(x + v) = q \quad (\text{C3})$$

$$u(x + v) = r \quad (\text{B3})$$

$$v(x + v) = 0. \quad (\text{D3})$$

Z rovnic (A3) a (D3) plyne

$x + v = 0 \vee (x = 0 \wedge v = 0)$, což ovšem znamená $x + v = 0$, a tedy podle (B3) a (C3) musí být i $q = 0, r = 0$, tedy $\mathbf{P}$ musí být nulová matice. Zjistili jsme tak, že *jediná singulární matice s nulovou hlavní diagonálou, k níž existuje odmocnina, je matice nulová.*

V tomto případě (kdy $\mathbf{P}$ je nulová matice) však z rovnic (A3) až (D3) nedostáváme žádné omezení pro y a u . Protože matice je singulární, součin prvků na hlavní diagonále je nulový, musí být nulový i součin prvků na vedlejší diagonále, tedy $y = 0 \vee u = 0$. Druhá z těchto proměnných může být libovolná. Necht' tedy z je libovolné reálné číslo. Pak

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Nyní předpokládejme, že $p + s = 0, p \neq 0, s \neq 0$, tedy $s = -p$.

Protože $\det \mathbf{P} = 0$, bude Naše soustava rovnic nyní vypadat

$$x(x + v) = p \quad (\text{A3})$$

$$y(x + v) = ap \quad (\text{C3})$$

$$u(x + v) = -p/a \quad (\text{B3})$$

$$v(x + v) = -p, \quad (\text{D3})$$

kde a je libovolné reálné nenulové číslo. Sečtením rovnic (D3) a (A3) dostaneme $(x + v)^2 = 0$, tedy $x + v = 0$. Pro y dostáváme podmínku $y \cdot 0 = ap$, kterou nelze splnit. Soustava nemá tedy řešení, jinými slovy odmocnina ze singulární matice tvaru

$$\begin{vmatrix} p & q \\ -p^2/q & -p \end{vmatrix}$$

neexistuje.

Shrnutí. Pro singulární matice $\mathbf{P} = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$ tedy platí:

Jestliže $p + s < 0$, odmocnina z matice $\mathbf{P}$ neexistuje.

Jestliže $p + s > 0$, existují dvě odmocniny z matice $\mathbf{P}$, podle (2) to jsou

$$X_1 = \begin{vmatrix} p/\sqrt{p+s} & q/\sqrt{p+s} \\ r/\sqrt{p+s} & s/\sqrt{p+s} \end{vmatrix}$$

a

$$X_2 = -X_1 = \begin{vmatrix} -p/\sqrt{p+s} & -q/\sqrt{p+s} \\ -r/\sqrt{p+s} & -s/\sqrt{p+s} \end{vmatrix}$$

Jestliže $p + s = 0$ a $\mathbf{P}$ není nulová matice, odmocnina z matice $\mathbf{P}$ neexistuje.

Jestliže $\mathbf{P}$ je nulová matice, přísluší jí nekonečně mnoho odmocnin, je jí každá matice, která má v hlavní diagonále a aspoň na jednom místě vedlejší diagonále nuly; druhý prvek ve vedlejší diagonále může být jakýkoli.

B. Odmocnina z regulární matice řádu 2

B1. Řešení úlohy

Nechť $\mathbf{P}$ je nyní regulární matice řádu 2. Budeme hledat takovou matici $\mathbf{X}$, pro niž platí $\mathbf{X}^2 = \mathbf{P}$. Determinant regulární matice je různý od nuly. Podle věty o násobení determinantů je $\det \mathbf{P} = (\det \mathbf{X})^2$. Položme $d = |\det \mathbf{X}|$. Je zřejmé, že k tomu, aby odmocnina z regulární matice $\mathbf{P}$ existovala, musí být $\det \mathbf{P} > 0$. Platí $\det \mathbf{X} = xv - yu = \gamma d$, kde $\gamma = \pm 1$, a tedy

$$yu = xv - \gamma d. \quad (4)$$

Dosaďme odtud do (A) až (D).

$$x^2 + xv - \gamma d = p \quad (\text{A4}) \qquad y(x + v) = q \quad (\text{C4})$$

$$u(x + v) = r \quad (\text{B4}) \qquad v^2 + xv - \gamma d = s \quad (\text{D4})$$

Tedy

$$x(x + v) = p + \gamma d \quad (\text{A5}) \qquad y(x + v) = q \quad (\text{C5})$$

$$u(x + v) = r \quad (\text{B5}) \qquad v(x + v) = s + \gamma d \quad (\text{D5})$$

Nyní sečteme (A5) a (D5), dostaneme

$$(x + v)^2 = p + s + 2\gamma d, \quad (\text{E})$$

tedy

$$x + v = \delta \sqrt{(p + s + 2\gamma d)},$$

kde $\delta = \pm 1$.

Aby výraz bylo možno odmocnit, musí být splněna nerovnost

$$p + s + 2\gamma d \geq 0. \quad (5)$$

Platí $\gamma = 1 \vee \gamma = -1$.

Věnujme se postupně případům

$$\text{a) } p + s > 2d, \quad (5a)$$

$$\text{b) } p + s \in (-2d, 2d) \quad (5b)$$

$$\text{c) } p + s = 2d \quad (5c)$$

$$\text{d) } p + s = -2d \quad (5d)$$

V případě a) platí nerovnost

$$p + s + 2\gamma d > 0. \quad (5')$$

jak pro $\gamma = 1$, tak pro $\gamma = -1$,

v případech b) a c) pak nerovnost (5') platí jen pro $\gamma = 1$.

Vyjadřovat dále pomocí matice $\mathbf{X}$

Věnujme se nejdříve případu a) ($p + s > 2d$).

Z rovnic (A5) až (D5) po dosazení za $x + v$ a následujícím vydělením obou stran součtem $x + v = \delta\sqrt{(p + s + 2\gamma d)}$, dostaneme 4 různá řešení pro neznámé x, y, u, v (parametry γ i δ zde mohou nabývat hodnot jak 1, tak i -1):

$$x = (p + \gamma d) / (\delta\sqrt{(p + s + 2\gamma d)}) \quad (A6)$$

$$u = r / (\delta\sqrt{(p + s + 2\gamma d)}) \quad (B6)$$

$$y = q / (\delta\sqrt{(p + s + 2\gamma d)}) \quad (C6)$$

$$v = (s + \gamma d) / (\delta\sqrt{(p + s + 2\gamma d)}) \quad (D6)$$

V případě b), kdy $p + s \in (-2d, 2d)$, je nerovnost (5) splněna jen pro $\gamma = 1$, a tak dostaneme 2 různá řešení (pro $\delta = \pm 1$):

$$x = (p + d) / (\delta\sqrt{(p + s + 2d)}) \quad (A7)$$

$$u = r / (\delta\sqrt{(p + s + 2d)}) \quad (B7)$$

$$y = q / (\delta\sqrt{(p + s + 2d)}) \quad (C7)$$

$$v = (s + d) / (\delta\sqrt{(p + s + 2d)}) \quad (D7)$$

Věnujme se nyní případu d). Tam $\gamma = 1, p + s = -2d$. Podle (E) je

$$x + v = 0. \quad (F)$$

Ze vztahů (A5) až (D5) máme

$$x \cdot 0 = p + d = 0 \quad (A8) \quad y \cdot 0 = q = 0 \quad (C8)$$

$$u \cdot 0 = r = 0 \quad (B8) \quad v \cdot 0 = s + d = 0 \quad (D8)$$

Tedy případ d) nastane jedině v případě, kdy $q = r = 0$ a $p = s = -d$, kde d je libovolné kladné číslo.

Zapišme vztay (A8) až (D8) jako soustavu rovnic:

$$x \cdot 0 = 0 \quad (A9) \quad y \cdot 0 = 0 \quad (C9)$$

$$u \cdot 0 = 0 \quad (B9) \quad v \cdot 0 = 0 \quad (D9)$$

Neznámé x, y, u, v mohou nabývat libovolných hodnot. Stále však platí podmínky $x + v = 0$ (F) a $xv - ys = d^2$. Znamená to, že pokud $p + s = -2d$, má odmocňovaná matice tvar

$$P = \begin{vmatrix} -d & 0 \\ 0 & -d \end{vmatrix}$$

a její odmocninou je každá matice tvaru

$$X = \begin{vmatrix} x & y \\ (-x^2+d)/y & -x \end{vmatrix},$$

kde x je libovolné reálné číslo a y libovolné nenulové reálné číslo.

V případě c) spojíme úvahy z případů b) a d). I zde totiž podmínkám úlohy vyhovuje vyjádření prvků hledané matice $\mathbf{X}$ pro parametr $\gamma = 1$ pomocí vztahů (A7) až (G7). Pro parametr $\gamma = -1$ můžeme uvažovat obdobně, jak jsme to dělali v případě d). Vztahy (A8) až (D8) nabudou tvar

$$x \cdot 0 = p - d = 0 \quad (\text{A8}') \quad y \cdot 0 = q = 0 \quad (\text{C8}')$$

$$u \cdot 0 = r = 0 \quad (\text{B8}') \quad v \cdot 0 = s - d = 0 \quad (\text{D8}')$$

Vztahy (A9) až (D9) budou vypadat úplně stejně.

Neznámé x, y, u, v mohou nabývat libovolných hodnot. I zde stále platí podmínky $x + v = 0$ (F) a $xv - ys = d^2$. Znamená to, že pokud $p + s = 2d$, má odmocňovaná matice tvar

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}$$

a její odmocninou je každá matice tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} x & y \\ (-x^2 - d)/y & -x \end{vmatrix},$$

kde x je libovolné reálné číslo a y libovolné nenulové reálné číslo.

B2. Přehled

Nechť $\mathbf{P} = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$ je regulární matice řádu 2. Hledáme množinu matic

$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix}$, které jsou odmocninami z matice $\mathbf{P}$, tedy takových, že $\mathbf{X}^2 = \mathbf{P}$.

Pokud $\det \mathbf{P} < 0$, žádná odmocnina z matice $\mathbf{P}$ neexistuje. Pokud $\det \mathbf{P} > 0$, označme $d = \sqrt{\det \mathbf{P}}$. Struktura množiny odmocnin z $\mathbf{P}$ závisí na vztahu součtu $p + s$ s číslem d ; jde o následujících pět vyčerpávajících případů:

- a) $p + q > 2d$,
- b) $p + q = 2d$,
- c) $-2d < p + q < 2d$
- d) $p + q = -2d$,
- e) $p + q < -2d$

Odvození jsme uvedli v části B1.

Nechť $\mathbf{J}$ je jednotková matice řádu 2.

Označme nyní

$$c_1 = 1/\sqrt{p+q-2d},$$

$$c_2 = 1/\sqrt{p+q+2d}.$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P} - d \mathbf{J}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P} + d \mathbf{J}$$

Číslo c_1 je definováno jen pro případ a), c_2 pro případy a) až c).

V případě **a)** existují k matici $\mathbf{P}$ čtyři odmocniny:

$$\mathbf{X}_1 = c_1 \mathbf{P}_1,$$

$$\mathbf{X}_2 = c_2 \mathbf{P}_2,$$

$$\mathbf{X}_3 = -c_1 \mathbf{P}_1,$$

$$\mathbf{X}_4 = -c_2 \mathbf{P}_2.$$

V případě **b)** existují k matici $\mathbf{P}$ dvě odmocniny

$$\mathbf{X}_2 = c_2 \mathbf{P}_2,$$

$$\mathbf{X}_4 = -c_2 \mathbf{P}_2,$$

a pokud $p = s = d$, $q = r = 0$, tak ještě nekonečně mnoho odmocnin tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} x & y \\ [(-x^2+d)/y] & -x \end{vmatrix},$$

kde x je libovolné reálné číslo a y libovolné nenulové reálné číslo.

V případě **c)** existují k matici $\mathbf{P}$ dvě odmocniny

$$\mathbf{X}_2 = c_2 \mathbf{P}_2,$$

$$\mathbf{X}_4 = -c_2 \mathbf{P}_2.$$

V případě **d)** pokud

$$p = s = -d, \quad q = r = 0, \tag{G}$$

existuje k matici $\mathbf{P}$ nekonečně mnoho odmocnin tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} x & y \\ [(-x^2-d)/y] & -x \end{vmatrix},$$

kde x je libovolné reálné číslo a y libovolné nenulové reálné číslo. Pokud podmínka (G) není splněna, odmocnina z matice $\mathbf{P}$ neexistuje.

V případě **e)** odmocnina z matice $\mathbf{P}$ neexistuje.