Vlci a zajíci v pohádkovém lese

Jiří Nečas

Vstupujeme do pohádky o jednom zvláštním lese. Ona ovšem celá pohádka to bude poněkud zvláštní. Nebudou v ní víly ani králové, a dokonce ani vlkodlaci, bludičky či jiná strašidla, jak by se pro pohádkový les slušelo a patřilo. Protože však tam pořádek věcí bude poněkud jiný než ve skutečnosti, přívlastek "pohádkový" mu upírat nebudeme. A aspoň pro princeznu v ní místo najdeme. V lese si budeme všímat vlků a zajíců. Vegetariánští zajíci se o sebe postarají, rostlinné stravy je dostatek, a vlkům poslouží jako základní zdroj obživy. Pozornost věnujeme tomu, jak se mění velikost vlčí a zaječí populace. Vlkům role predátorů sedí. Zajíci by asi patřili spíš na pole a vlci by mohli mít jinou základní lahůdku, ale tím by se nám komplikoval systém označování − proměnné veličiny značíváme písmeny z konce abecedy, a tak se nám bude hodit v pro vlky a z pro zajíce.[1] Nebudeme však těmito písmeny označovat množství sledovaných zvířat, nýbrž odchylky jejich počtu od střední hodnoty.

Čím větší bude zaječí populace, tím lépe se vlkům povede, což vlci na rozdíl od nás lidí nepromítnou do větší "osobní spotřeby", ale zkrátka budou se více množit. A protože přírůstek veličiny vyjadřuje derivace[2], můžeme tuto závislost matematicky vyjádřit rovnicí[3]

$$v' = a\, z,$$

kde a je kladná konstanta, vyjadřující závislost fertility vlků na dostupnosti potravy. Tato rovnice ovšem popisuje vývoj vlčí populace i v dobách zlých, když je zajíců málo (jejich počet je menší než střední stav, tedy odchylka z od střední hodnoty je záporná) a vlků ubývá ($v' < 0$).

Jak tedy vývoj vlčí a zaječí populace funguje? Když vlků přibude, budou se zajíci příliš často stávat potravou vlků, takže jejich populace bude slábnout - čím větší bude "nadstav" (počet nad střední hodnotou) vlků, tím více bude zajíců ubývat, čím větší bude podstav (počet pod střední hodnotou) vlků, tím více budou zajíci přibývat. Změna množství zajíců tedy bude mít obrácené znaménko než odchylka počtu vlků od rovnovážné podoby; právě uvedenou úvahu můžeme vyjádřit rovnicí

$$z' = -\, b\, v,$$

[1] Při tom si uvědomíme, jak příjemný jazyk je čeština, že nám takovouto možnost poskytuje.

[2] Nezávisle proměnnou veličinou je zde čas t; jeho jednotka může být libovolná, avšak pro celou úvahu pevně zvolená; vhodnější zde bude představit si ji jako den či týden než jako sekundu, ve fyzice běžně užívanou.

[3] Počet zajíců i počet vlků jsou přirozená čísla, která netvoří hustou množinu, a tak pokud není jejich počet konstantní, nemůže jejich závislost na čase být vyjádřena spojitou (a tedy ani derivovatelnou) funkcí. Vzhledem k výhodnosti prostředků matematické analýzy její aparát zde používáme s tím, že při dostatečně velkých počtech malou celočíselnou změnu můžeme považovat za spojitou. Jiný možný přístup je nevyjadřovat velikost populace počtem kusu, nýbrž její celkovou hmotností. Pak derivace podle času má smysl, avšak zas narazíme na jiné problémy − vlci žerou "v dávkách", jak nakládat s hmotností zardoušených, avšak ještě nesežraných hlodavců atd.

kde kladná konstanta b vyjadřuje závislost přírůstku zajíců v závislosti na míře ohrožení vlky. Určení konstant a a b nechme princezně. Naše princezna je jiná než jaké obvykle v pohádkách bývají. Krásnými dlouhými kaštanovými vlasy, velkýma dobro vyzařujícíma očima, milým úsměvem, cudností a skromností své tradiční pohádkové kolegyně připomíná, avšak místo nepraktických princeznovských šatů má zelené tričko s nápisy $E = m\,c^2$, $E = h\,f$, $F = E - T\,S$ a hnědé džíny; barvou oblečení tak vyjadřuje lásku k lesu, jehož se naše pohádka týká. A co je důležité, naše princezna má malý doktorát ze zoologie a PhD. z ekologie. Nápisy na tričku ukazují k fyzice; princezna totiž ví, že všechny procesy v zoologii i v ekologii musejí být v souladu s fyzikálními zákony. A ví také, jak užitečný nástroj při poznávání je matematika, a tak s určováním konstant počká, až bude mít matematický model lesa zpracovaný. My jej budeme řešit spolu s ní.

Máme dvě rovnice, které váží vlčí a zaječí populaci. Co však s nimi? Nejdříve je zderivujeme . Dostaneme:

$$v'' = a\,z',$$

$$z'' = -\,b\,v'.$$

Nyní za první derivace dosaďme z našich původně sestavených rovnic:

$$v'' = -\,a\,b\,v,$$

$$z'' = -\,a\,b\,z.$$

Pro obě populace dostáváme stejné rovnice. Převedeme v nich členy z pravé strany na levou:

$$v'' + a\,b\,v = 0,$$

$$z'' + a\,b\,z = 0.$$

Protože a i b jsou kladná čísla, je jejich součin rovněž kladný a bude užitečné se na něj dívat jako na druhou mocninu určité veličiny, kterou označíme ω, tedy

$$a\,b = \omega^2.$$

Jak odchylka počtu vlků, tak odchylka počtu zajíců od své střední hodnoty se řídí stejnou diferenciální rovnicí:

$$v'' + \omega^2\,v = 0,$$

$$z'' + \omega^2\,z = 0.$$

Jde o homogenní (krátkou) lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Kořeny její charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

jsou ryze imaginární: $\omega\,\mathrm{i}$ a $-\omega\,\mathrm{i}$. Znamená to, že řešení rovnic můžeme vyjádřit ve tvaru

$$v = K_1 \cos(\omega\,t) + K_2 \sin(\omega\,t),$$

$$z = C_1 \cos(\omega\,t) + C_2 \sin(\omega\,t).$$

Konstanty K_1, K_2, C_1 a C_2 lze určit na základě počátečních podmínek, přičemž mezi vlčími konstantami K_1, K_2 a zaječími konstantami C_1, C_2 existuje souvislost, jejíž konkrétní tvar si ukážeme.

Uvedli jsme řešení diferenciálních rovnic ve tvaru, v jakém bývá v učebnicích předkládáno, tedy jako lineární kombinaci dvou lineární nezávislých (bázických) řešení. Praktici však dávají přednost jinému vyjádření, které dává názornější představu o jeho průběhu:

$$v = K \sin(\omega t + \psi),$$

$$z = C \sin(\omega t + \varphi),$$

přičemž konstanty ψ a φ lze volit z intervalu $(-\pi/2,\ \pi/2\rangle$.

Dosud sledujeme prakticky symetricky vývoj vlčí i zaječí populace. Abychom zjednodušili vyjadřování, vybereme si jednu z nich, jejímuž popisu budeme dávat přednost. Naše vzdělaná princezna dobře ví, jak užitečné pro zdraví lesního společenství jsou šelmy, nicméně jejímu jemnému princeznímu srdci jsou přece jen bližší zajíci. A proto na zaječí rovnici si ukažme, jak spolu souvisejí konstanty z jednotlivých vyjádření řešení naší diferenciální rovnice:

$$C_1 = C \sin \varphi,$$

$$C_2 = C \cos \varphi,$$

$$C = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(C_1 / C_2).$$

Uvedené vztahy si čtenář může ověřit pomocí vztahu pro vyjádření sinu a kosinu součtu dvou argumentů.

Princezna tedy ví, jak pro zdravý vývoj populace zajíců jsou vlci užiteční. Co by se stalo, kdyby vlci v lese nebyli? Přerušme naše přemýšlení o vzájemném působení obou populací a zkusme se zamyslet, jak by se nad zaječí populace vyvíjela v lese bez vlků. Pokud se jim dobře povede, budou se zajíci množit. Čím více zajíců bude, tím více mezi nimi bude zaječích maminek a tatínků, a tedy tím více jich bude přibývat. To můžeme vyjádřit diferenciální rovnicí[4]

$$Z' = k Z,$$

kterou můžeme napsat ve tvaru standardním pro lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$Z' - k Z = 0.$$

Určení kladné konstanty k zas necháme zooložce-ekoložce princezně a my pomocí charakteristické rovnice

$$\lambda - k = 0$$

najdeme řešení diferenciální rovnice, které vyjadřuje, jak by se s časem měnílo množství zajíců:

$$Z = Z_0 e^{kt}.$$

[4] V tomto případě nemáme k dispozici nějakou střední hodnotu počtu králíků, neboť oni se stále množí. Proto pracujeme s jejich celkovým počtem, a k jeho označení použijeme pro odlišení velké Z.

Počet zajíců by tak exponenciálně rostl nade všechny meze. Pochopitelně, ač jsou skromní vegetariáni, jednou by jim přestala stačit lesní vegetace k obživě, začali by si překážet, podmínky důstojného zaječího života by přestaly existovat. Vývoj zaječí populace by se přestal řídit rovnicí odvozenou za předpokladu, že se zajícům vede dobře. V lese by se prostě nedalo normálně žít. Došlo by ke kolapsu. A tak díky vlkům, že k tomu nedochází!

Podobně je tomu s každým exponenciálním růstem populace. Na rozdíl od zajíců jsou lidé vybaveni rozumem a vůlí. V některých oblastech lidská populace stále výrazně roste, avšak celosvětově větším problémem, který může znamenat zhoršování podmínek lidského života, je růst náročnosti, růst spotřeby. A tak se nabízí otázka, zda třeba současná ekonomická krize nemá lidem pomoci podobně jako vlci pomáhají zdravému vývoji zaječí populace. Pak ovšem ty různé protikrizové balíčky, šrotovné apod. připomínají jakési případné nemoudré snahy zaječích pohlavárů vlky cílevědomě[5] vyhubit.

Vraťme se však k lesu, kde se navzájem ovlivňují zaječí a vlčí populace. Zderivujme řešení diferenciální rovnice pro vlky, a to v našem "praktickém" tvaru::

$$v' = \omega K \cos(\omega t + \psi).$$

Do vztahu $v' = a z$ dosaďme za v' a za z vyjádření vyjadřující závislost na čase:

$$\omega K \cos(\omega t + \psi) = aC \sin(\omega t + \varphi).$$

Porovnávat kosinus se sinem bude snazší, když si uvědomíme, že platí identita

$$\cos x = \sin(x + \pi/2)$$

(ověříme ji zas jednoduše pomocí vztahu pro sinus součtu dvou argumentů s tím, že $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$). Použijeme-li tento vztah na kosinus vyskytující se v derivaci počtu vlků, dostaneme

$$\omega K \sin(\omega t + \psi + \pi/2) = a C \sin(\omega t + \varphi).$$

To znamená, že

$$K = a C/\omega,$$

$$\psi = \varphi - \pi/2.$$

Vývoj našich populací tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$z = C \sin(\omega t + \varphi).$$

$$v = (a C / \omega) \sin(\omega t + \varphi - \pi/2),$$

popřípadě (protože $\omega^2 = a b$)

$$z = C \sin(\omega t + \varphi).$$

$$v = C (a / b)^{1/2} \cos(\omega t + \varphi).$$

Konstanty C a φ jsou určeny počátečními podmínkami. Jestliže začneme čas měřit, když stav zajíců bude roven střední hodnotě a bude růst, bude "fázová" konstanta φ rovna nule. Vzhledem k tomu, že funkční hodnoty funkcí sinus a kosinus se pohybují mezi -1 a 1, vyjadřuje konstanta C maximální

[5] Jsme v pohádce, a tam takové cílevědomé počínání zaječí populace je možné.

možnou odchylku počtu zajíců od střední hodnoty. Maximální možná odchylka K stavu vlků není veličinou na této nezávislou, je totiž rovna $a\,C\,/\,\omega$, což můžeme také vyjádřit ve tvaru $C\,(a/b)^{1/2}$. Povšimneme si, že platí $K\,/\,C = (a/b)^{1/2}$, tedy

$$a\,/\,b = (K\,/\,C)^2.$$

Pro sestavení rovnic jsme udělali řadu zjednodušujících předpokladů. Konec konců, pohádkové populace vlků a zajíců se jimi mohou řídit. Došli jsme k výsledku, že obě oscilují kolem rovnovážné polohy, přičemž vývoj vlčí populace je o čtvrt periody (připomeňme, že perioda funkcí sinus a kosinus je $2\,\pi$) napřed před populací zaječí, což můžeme vyjádřit i tak, že je-li vývoj zaječí populace vyjádřen (při vhodné volbě měřítka) grafem funkce sinus, vyjadřuje graf funkce kosinus vývoj populace vlčí. Konstanty úměrnosti a a b z lineárních závislostí mezi v' a z a mezi z' a v se promítnou jednak do poměru mezi amplitudami, jak jsme již před začátkem tohoto odstavce zmínili, jednak do délky T_0 trvání periody,

$$T_0 \;=\; 2\,\pi\,/\,\omega \;= 2\,\pi\,/\,(a\,b)^{1/2}\,,$$

odkud můžeme vyjádřit součin konstant a a b ve tvaru

$$a\,b = 4\,\pi^2\,/\,T^2.$$

Pokud princezna zná amplitudy K a C, s nimiž velikosti populací oscilují podle rovnovážné polohy, a periodu T tohoto kolísání[6], snadno vypočítá konstanty a a b, které vyjadřují, jak výrazně změna jedné sledované veličiny závisí na hodnotě veličiny druhé:

$$a = 2\,\pi\,K\,/\,(T\,C),$$
$$b = 2\,\pi\,C\,/\,(T\,K),$$

Počty zajíců i vlků v lese se mění, avšak systém je tak nastaven, že střední hodnota zůstává stálá. Kdyby kvůli nějakému vnějšímu zásahu došlo ke změně některé z konstant a či b, ovlivní to poměr amplitud obou populací a délku periody, avšak regulační schopnost bude trvat, pokud nebude změna příliš velká, třeba pokud velikost některé z populací neklesne na nulu; vymření zajíců by mělo za následek vymření vlků, vymření vlků samo by však znamenalo nekontrolovaný růst zaječí populace, což by, jak jsme si už řekli, znamenalo pro zajíce také katastrofu.

Model, který jsme řešili pomocí soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu (převedením na řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu), je velice zjednodušující. To není nic pohádkového. V praxi kvůli možnosti modelovat reálnou situaci tak, abychom ji mohli řešit analyticky, velice často zjednodušujeme. Snad jsme tím však vystihli podstatu regulace, kdy je některá veličina udržována v oscilacích kolem určité rovnovážné polohy pomocí jiné, negativní zpětnou vazbu zprostředkovávající veličiny. Pomocí zcela elementární teorie diferenciálních rovnic s jednou neznámou funkcí jsme udělali matematický model s dvěma v čase se na sobě závisle měnícími veličinami, tedy s dvěma neznámými funkcemi času.

[6] V našem pohádkovém světě je čas homogenní, tedy nějaké kolísání způsobené ročními obdobím zde nenastává.

Regulace udržuje určité parametry v daných mezích. Pokud dojde k jejich příliš velkému vychýlení, přestává fungovat. Pro spoustu různých veličin, které můžeme na Zemi měřit, existují takové vzájemně složitě provázané mechanismy, které udržují jejich žádoucí hodnoty v potřebných mezích. Bez nich by na Zemi nebyl lidský život možný. Člověk si počíná však často bezohledně, takže může hodnoty těchto pro život důležitých veličin vychýlit natolik, až regulační mechanismy selžou. Nelze přesně zjistit, v jakých mezích regulace funguje, nicméně každopádně lidská rozpínavost představuje vážné nebezpečí pro fungování toho, co je podmínkou života.

Vztahy ve skutečném světě jsou nesrovnatelně složitější než v pohádkovém lese. Úlohu naší princezny v něm hrají týmy vědců. Zjednodušený pohádkolesní model jsme snadno vyřešili s využitím elementárních znalostí o diferenciálních rovnicích. Naše současné lidské vědomosti o světě slouží k sestavení rozsáhlých modelů, které se řeší na počítačích. Ani ty se neobejdou bez zjednodušování. O světě a zákonitostech v něm platných toho víme stále více, a při tom stále více a více poznáváme, kolik toho nevíme. Zdravou lidskou reakcí by měla být rostoucí touha po poznání[7] a zároveň s ní i veliká pokora a úžas nad tím, jak zemský systém funguje. K tomu však patří i cílevědomá snaha jeho fungování neublížit. A to vše vyžaduje hluboce prožité poznávání, vedoucí k vědomí sounáležitosti vlastního "já" s celkem - s lidstvem, se Zemí, s vesmírem. A to zas vede ke stále hlubší pokoře.[8]

Loučíme se teď s naší vzdělanou princeznou a s periodicky kolísajícími populacemi vlků a zajíců, loučíme se i se soustavou dvou lineárních diferenciálních rovnic o dvou neznámých funkcích, a opouštíme náš pohádkový les s vědomím toho, že mezi naším "reálným" světem s měřitelnými veličinami, světem pohádek a ideálním světem matematiky vlastně žádná ostrá hranice není a vším tím prostupuje svět, ve kterém se uskutečňuje naše lidství, naše touhy a usilování, kde má své místo i utopie, takzvanými realisty odmítaná, a přesto jako motivace k plnému, tvůrčímu prožívání našich životů nesmírně důležitá.

Literatura

Nečas, J.: Hrnečku, vař aneb Separace proměnných v české pohádce. Envigogika 2008, č. 1. Mundus symbolicus 16 (2008)

Rastrigin, L.A.: Etot slučajnyj, slučajnyj, slučajnyj mir! Moskva, Molodaja gvardija 1969.

Psáno pro Envigogiku a pro Mundus Symbolicus

10.06.2009

[7] Ve světě idejí (v informační sféře) je na místě chtít stále více a více, zatímco ve světě materiálním nikoli.
[8] Znamená to existenci kladné zpětné vazby pro postoj pokory.