# Möbiova funkce a Valdovo číslo

Značení

V tomto článku budeme používat označení

$\mathcal{N}_0$ = {0, 1, 2, 3, ...} – množina všech přirozených čísel (včetně nuly),

$\mathcal{N}$ = {1, 2, 3, ...} – množina všech nenulových přirozených čísel,

$\mathcal{N}_n$ = {0, 1, 2, 3, ..., $n$ – 1} – množina všech přirozených čísel menších než $n$,

$\mathcal{R}$ – množina všech reálných čísel,

$\mathcal{R}^+$ – množina všech kladných reálných čísel.

*Möbiova funkce* μ je funkce definovaná na množině $\mathcal{N}$ takto:

Pokud v prvočíselném rozkladu čísla $n \in \mathcal{N}$ se některý činitel vyskytuje ve vyšší než první mocnině, je $\mu(n) = 0$.

Pokud v prvočíselném rozkladu čísla $n \in \mathcal{N}$ se žádný činitel nevyskytuje ve vyšší než první mocnině a počet prvočinitelů je lichý, je $\mu(n) = -1$.

Pokud v prvočíselném rozkladu čísla $n \in \mathcal{N}$ se žádný činitel nevyskytuje ve vyšší než první mocnině a počet prvočinitelů je sudý, je $\mu(n) = 1$.

Poznamenejme, že v prvočíselném rozkladu čísla 1 je počet prvočinitelů roven 0, tedy je sudý, a tedy $\mu(1) = 1$. Pro libovolné prvočíslo $p$ platí $\mu(p) = -1$.

Möbiova funkce je multiplikativní, tj. pro nesoudělná čísla $k, m \in \mathcal{N}$ platí

$$\mu(k) \,.\, \mu(m) = \mu(k.m).$$

Hodnoty Möbiovy funkce pro čísla nepřesahující 40 jsou uvedeny v tabulce 1.

Mezi těmito 40 hodnotami funkce μ se hodnota -1 vyskytuje 13krát, hodnota 0 pak 14krát a hodnota 1 opět 13krát. Nabízí se otázka, zda počty výskytu jednotlivých hodnot jsou přibližně stejné, tedy že na libovolné množině $\mathcal{N}_n$ se každá ze tří možných funkčních hodnot vyskytuje zhruba pro 1/3 argumentů.

Tabulka 2 uvádí frekvenci funkčních hodnot Möbiovy funkce na množinách $\mathcal{N}_{50}$, $\mathcal{N}_{100}$, $\mathcal{N}_{150}$, $\mathcal{N}_{200}$. Hodnoty byly počítány ručně; byl bych rád, kdyby v tabulce nebyla chyba, ale jsem už stařec, a k tomu patří zvýšené riziko omylu. Z tabulky je patrno, že počet nulových hodnot poněkud převyšuje jak počet hodnot 1, tak hodnot -1.

Tabulka 1

| *n* | μ(*n*) |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | -1 |
| 3 | -1 |
| 4 | 0 |
| 5 | -1 |
| 6 | 1 |
| 7 | -1 |
| 8 | 0 |
| 9 | 0 |
| 10 | 1 |
| 11 | -1 |
| 12 | 0 |
| 13 | -1 |
| 14 | 1 |
| 15 | 1 |
| 16 | 0 |
| 17 | -1 |
| 18 | 0 |
| 19 | -1 |
| 20 | 0 |

| *n* | μ(*n*) |
|---|---|
| 21 | 1 |
| 22 | 1 |
| 23 | -1 |
| 24 | 0 |
| 25 | 0 |
| 26 | 1 |
| 27 | 0 |
| 28 | 0 |
| 29 | -1 |
| 30 | -1 |
| 31 | -1 |
| 32 | 0 |
| 33 | 1 |
| 34 | 1 |
| 35 | 1 |
| 36 | 0 |
| 37 | -1 |
| 38 | 1 |
| 39 | 1 |
| 40 | 0 |

Tabulka 2

| n | Počet | | | Relativní frekvence | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 |
| 50 | 17 | 19 | 14 | 0,34 | 0,38 | 0,28 |
| 100 | 30 | 39 | 31 | 0,30 | 0,39 | 0,31 |
| 150 | 47 | 58 | 45 | 0,31 | 0,39 | 0,30 |
| 200 | 66 | 78 | 56 | 0,33 | 0,39 | 0,28 |

Označme $q_n(k)$ relativní počet hodnot funkce μ rovných *k* (*k* = -1, 0, 1) na množině $\mathcal{N}_n$. Podle tab. 2 tedy je např $q_{200}(-1) = 0{,}33$, $q_{50}(0) = 0{,}38$.

Bylo by zajímavé znát pro jednotlivá *k* limity

$\lim_{n\to\infty} q_n(k)$.

Souvisejí s rozložením prvočísel; netroufám si ani konstatovat, zda obecně existují. Snad ano, a pokud ano, mám tendence věřit, že

$\lim_{n\to\infty} q_n(-1) = \lim_{n\to\infty} q_n(1)$

Z výskytu prvočinitelů s vyšší mocninou v prvočíselném rozkladu čísel lze ukázat, že pro $n$ počínajíc určitým $n_0$ je

$q_n(0) \in (0{,}38;\ 0{,}41)$

Existenci limity $\lim_{n\to\infty} q_n(0)$ považuji za ještě pravděpodobnější než existenci limit $\lim_{n\to\infty} q_n(k)$ pro $k = \pm 1$, a ležela by v intervalu (0,38; 0,41), tedy při zaokrouhlení na jednu platnou cifru by byla 0,4. Pokud by limity existovaly i pro $k = \pm 1$ a byly stejné, jejich hodnota by ležela blízko 0,3.

## ***Valdovo číslo***

Tento termín jsem si rozhodně nevymyslil, ale teď jej nikde v literatuře nejsem s to najít ani "vygooglit".

*Valdovo číslo* je reálné číslo

$V = \Sigma_{i=1}^{\infty} (\mu(i)/3^i) \approx 0{,}181\,995$

Ze znalosti Valdova čísla lze pro libovolné číslo $i \in \mathcal{N}$ určit hodnotu $\mu(i)$, naznačím zde algoritmus výpočtu. Celou část, resp. zlomkovou část čísla $x$ označíme Ce($x$), resp. Zl($x$). Hodnoty funkce $\mu(i)$ pro $i \le n$ budeme ukládat do pole M[$n$]:

```
    W ≔ V + 0,5
Pro i := 1 do n
        U ≔ 3 * W
        M[i] ≔ Ce (U) - 1
        W ≔ Fr (U)
 konec pro
 KONEC
```

Pro počáteční hodnotu W (před cyklem) platí $W = \Sigma_{i=1}^{\infty} ((\mu(i)+1)/3^i)$, tedy koeficienty v řadě pro W jsou nezáporné, což zjednoduší jejich vyjádření ze součtu řady.

Mnohem jednodušší je určení hodnot Möbiovy funkce, máme-li číslo V vyjádřené pomocí symetrické trojkové soustavy. Tu nyní popíšeme.

## ***Symetrická trojková soustava***

Předpokládám, že čtenář zná, jak se libovolné přirozené číslo $n$ zapisuje v číselné soustavě o základu $z$: Číslo "nula" se zapíše jako 0, číslo $n \in \mathcal{N}$ vyjádříme jako součet

$$n = \Sigma_{i=0}^{N} a_i z^i,$$

kde

$$a_i \in \mathcal{N}_z , a_N \neq 0.$$

Píšeme pak

$$n = a_N a_{N-1} \dots a_1 a_{0.}$$

Čísla $a_N$, $a_{N-1}$, ... $a_1$, $a_{0.}$ jsou pak číslice vyjadřující číslo $n$ v soustavě o základu $z$.

K vyjádření záporných čísel vyjádříme jejich absolutní hodnotu a před ni zapíšeme znaménko minus.

Způsob zápisu můžeme rozšířit na vyjádření libovolných reálných čísel v soustavě o základu $z$. Nejdříve nechť $b \in \mathcal{R}^+$. Pak je můžeme vyjádřit pomocí řady

$$b = \Sigma_{i=-\infty}^{N} a_i z^i,$$

kde

$$a_i \in \mathcal{N}_z , a_N \neq 0.$$

Pokud $b$ je celé číslo, jsou pro všechna $i$ < 0 číslice $a_i$ nuly. Pokud $b$ je racionální číslo, v jehož prvočíselném rozkladu jmenovatele (když v něm už nelze krátit) jsou jen prvočísla vyskytující se v rozkladu čísla $z$, pak existuje takové číslo $M$<0, že $b$ lze vyjádřit jako konečný součet

$$b = \Sigma_{i=M}^{N} a_i z^i.$$

Kladné reálné číslo $b$ pak zapíšeme

$$b = a_N a_{N-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$$

případně

$$b = a_N a_{N-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{M+1} a_M$$

Podobně jako v případě celých čísel, záporná reálná čísla zapíšeme pomocí zápisu jeho absolutní hodnoty, před níž zapíšeme znaménko minus.

V tomto článku se zabýváme funkcí, která nabývá tří různých hodnot: -1, 0 a 1. Věnujme proto pozornost *symetrické trojkové soustavě*, která nepoužívá číslice 0, 1 a 2, nýbrž -1, 0 a 1. V dalších úvahách tedy od obecného základu $z$ přejdeme ke konkrétnímu základu 3, ovšem budeme používat číslice pro čísla -1, 0 a 1. Množinu {-1, 0, 1} budeme označovat $\mathcal{T}$

Problémem je, že číslo -1 zapisujeme pomocí dvou znaků. Když jsem ponejprv o symetrické trojkové soustavě psal, bylo to, tuším, do Rozhledů matematicko-fyzikálních, milý a sympatický recenzent mi doporučil pro -1 používat obrácenou 1. Tehdy jsem do rukopisu tento symbol napsal ručně a tiskárna si s tím uměla poradit. Ve Wordu bych si s takovým symbolem poradit neuměl; kromě toho k němu mám dvě vážné výhrady. Jednak vzhledem si jsou symboly pro -1 a 1 příliš podobné, jednak např. Angličané nepíší 1, nýbrž I, takže pro ně by byly symboly pro nenulové cifry úplně stejné. Proto jsem se rozhodl pro cifry v symetrické trojkové soustavě používat písmena n, o, p.

Při zápisu čísla v modifikované trojkové soustavě tedy budeme jako číslice používat tři po sobě v abecedě následující písmena: -1 = n, 0 = o, 1 = p.

Prosím čtenáře, aby rozlišovali stojaté n, vyjadřující číslici -1, a kurzívní *n*, které vyjadřuje nějaké celé číslo.

Libovolné celé číslo *n* vyjádříme jako součet

$$n = \Sigma_{i=0}^{N} a_i z^i,$$

kde

$$a_i \in \mathcal{T},\ a_N \neq 0 \vee N = 0,$$

a zapíšeme je

$$n = a_N a_{N-1} \dots a_1 a_0.$$

Je-li $N > 0$, pak $n > 0$, resp. $n < 0$, právě když $a_N$ = p, resp. $a_N$ = n. K zápisu záporných čísel tedy nepotřebujeme znaménko minus.

I zde snadno můžeme přejít k zápisu reálných čísel. Libovolné reálné číslo *b* můžeme zapsat ve tvaru

$$b = \Sigma_{i=-\infty}^{N} a_i z^i,$$

jeho zápis v naší soustavě pak bude

$$b = a_N a_{N-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$$

Pokud $0 < |b| < 1$, bude mít zápis tvar

$$b = \mathrm{o}, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$$

Platí $b > 0$, resp $b < 0$, právě když první nenulová číslice je p, resp. n.

## ***Zápis Valdova čísla v symetrické trojkové soustavě***

Z předchozích úvah je zřejmé, že zápis Valdova čísla v symetrické trojkové soustavě je

$$V = \text{o},a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ \dots\ ,$$

kde

$$\mu(i) = a_{-i}\ .$$

K vyjádření číslic $a_j$ použijeme symboly {n, o, p}.

Tedy

V = o,pnnonpnoopnonppono...

Zápis V v symetrické trojkové soustavě je tak vlastně *tabulkou hodnot Möbiovy funkce; j*-tá číslice za řádovou čárkou vyjadřuje hodnotu μ(*j*).

*Jiří Nečas*

**Praha 11.4.2026, poslední úprava 13.4.2026**