Sinus a kosinus součtu úhlů

Jednoduché odvození vzorce

Jiří Nečas

a) **Sinus dvojnásobného úhlu**

Uvažujme rovnoramenný trojúhelník T, jehož ramena mají délku 1 a svírají úhel 2α. Počítejme dvěma různými postupy obsah P tohoto trojúhelníka:

aa) Použijme vzorec pro obsah trojúhelníka, známe-li délky dvou stran (ty jsou v našem případě 1) a úhlu jimi sevřeného:

$$P = \sin(2\alpha) / 2.$$

ab) Výška dělí náš trojúhelník T na dva pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami majícími délky $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ (a s přeponou délky 1). Každý z těchto trojúhelníků má obsah

$$P_1 = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha / 2,$$

dohromady tedy jejich obsah je

$$P_2 = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha,$$

což ovšem je obsah trojúhelníka T, tedy

$$\sin(2\alpha) / 2 = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha,$$

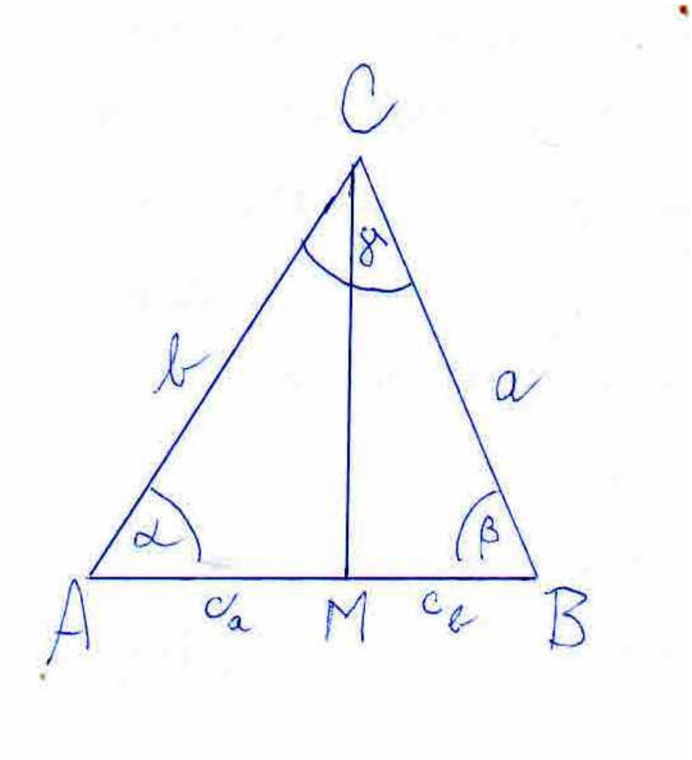
po vynásobení obou stran rovnosti dvěma dostaneme známý vzorec

$$\sin(2\alpha) = 2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha$$

b) **Sinus součtu dvou úhlů**

Výše uvedená úvaha a je speciálním případem tohoto

ba) Uvažujme trojúhelník ABC ae stranami *a, b, c* a s výškou $v = CM$ podle obrázku



Podle sinové věty platí

$$a / \sin \alpha = b / \sin \beta = K$$

(K jsme použili pro označení tohoto podílu, $K > 0$); tedy

$$a = K \cdot \sin \alpha, \quad b = K \cdot \sin \beta$$

V trojúhelníku platí (výšku vyjádříme pomocí hodnot pro levý i pravý pravoúhlý trojúhelník):

$$c_a = b \cdot \cos \alpha = K \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha,$$

$$c_b = a \cdot \cos \beta = K \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$v = a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha = K \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha$$

Délka strany $c = c_a + c_b$ tedy je

$$c = K \cdot (\sin \beta \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \beta),$$

a tedy dvojnásobný obsah 2*P* trojúhelníka *ABC* je

$$2P = c \,.\, v = K^2 \,.\, (\sin\beta \,.\, \cos\alpha + \sin\alpha \,.\, \cos\beta) \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\alpha \qquad \text{(A)}$$

bb) Dvojnásobný obsah trojúhelníka ABC můžeme vypočítat podle vzorce pro trojúhelník určený délkami dvou stran a velikostí úhlu, který svírají, v našem případě

$$2P = a.b.\sin\gamma.$$

Protože součet velikostí úhlů v trojúhelníku je 180°, je

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta),$$

a tedy

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta),$$

a tak

$$2P = a.b.\sin\gamma = K^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \sin(\alpha + \beta) \qquad \text{(B)}$$

Porovnáním výrazů (A) a (B) získáváme vztah pro sinus součtu úhlů (siny úhlů v trojúhelníku jsou kladná čísla):

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta \,.\, \cos\alpha + \sin\alpha \,.\, \cos\beta$$

c) Kosinus součtu dvou úhlů

Využijeme vztahy

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha),$$

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha),$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

Tedy

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin((90^\circ - \alpha) + (-\beta)) =$$

$$= \sin(90^\circ - \alpha) \,.\, \cos(-\beta) + \cos(90^\circ - \alpha) \,.\, \sin(-\beta) =$$

$$= \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta$$