Simplexová čísla

O-tá verze, neúplná, potřebuje doplnit

Předpokládaný název článku: **Parita v posloupnostech simplexových čísel**

1. Úvodní poznámky

1.1 Symetrická kombinace

Poznámka: Nebude-li jinak řečeno, probíhají proměnné množinu $\mathcal{N}$ všech přirozených čísel včetně 0, $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Máme-li n-prvkovou množinu, počet jejích s-prvkových podmnožin ($0 \le s \le p$) je vyjádřen kombinačním číslem "p nad s"

$$\text{Komb}(p, s) = p!/[s!.(p\text{-}s)!] \qquad (1.1)$$

Funkce Komb není symetrická ve svých proměnných. Proto někdy bývá výhodné místo s ní položit $r = p - s$ a pracovat se symetrickou funkcí (můžeme ji nazvat **symetrickou kombinací**)

$$\text{Kombsym}(r, s) = (r+s)!/(r!.s!) \qquad (1.2)$$

Platí tedy

$$\text{Kombsym}(r, s) = \text{Komb}(r + s, s) \qquad (1.3)$$

$$\text{Komb}(p, s) \quad = \text{Kombsym}(p\text{-}s, s) \qquad (1.3')$$

Pro rekurentní výpočet kombinačních čísel se užívá rovnost

$$\text{Komb}(p, s) = \text{Komb}(p\text{-}1, s\text{-}1) + \text{Komb}(p\text{-}1, s), \qquad (1.4)$$

kde $1 \le s \le p - 1$.

Platnost vztahu (1.4) snadno ověříme na základě vyjádření (1.1):

$\text{Komb}(p\text{-}1, s\text{-}1) + \text{Komb}(p\text{-}1, s) = (p\text{-}1)!/[(s\text{-}1)!.(p\text{-}s)!] + (p\text{-}1)!/[s!.(p\text{-}s\ \text{-}1)!] =$

$= [(p\text{-}1)!.s]/[s!.(p\text{-}s)!] + [(p\text{-}1)!.(p\text{-}s)]/[s!.(p\text{-}s)!] = [(p\text{-}1)!.(s + (p\text{-}s)]/[s!.(p\text{-}s)!] =$

$= p!/[s!.(p\text{-}s)!]$.

Do vztahu (1.4) nyní substituujme $p = r + s$, podle (1.3) (1.3') a dostaneme pro symetrickou kombinaci postupně

$$\text{KombSym}(r, s) = \text{Komb}(p, s) = \text{Komb}(p\text{-}1, s\text{-}1) + \text{Komb}(p\text{-}1, s) =$$

$$= \text{Kombsym}(r, s\text{-}1) + \text{Kombsym}(r\text{-}1, s),$$

tedy

$$\text{KombSym}(r, s) = \text{Kombsym}(r, s\text{-}1) + \text{Kombsym}(r\text{-}1, s). \qquad (1.5)$$

Z definice funkce Kombsym je zřejmé, že

$$\text{KombSym}(r, 0) = \text{Kombsym}(0, s) = 1 \qquad (1.6)$$

1.2. Výpočerní schémata pro funkce Komb a Kombsym

Rovnosti (1.4) a (1.5) umožňují rekurzívní výpočet hodnot funkcí Komb a Kombsym. Pro funkci Komb(p, s) se používá **Pascalův trojúhelník:**

```
              1
           1     1
         1    2    1
       1    3    3    1
     1    4    6    4    1
   1    5   10   10    5    1
  1   6   15   20   15   6   1
 1   7   21   35   21   7    1
. . . . . . . . . . . . . .
```

Trohúhelník je symetrický podle svislé osy. První řádek obsahuje jedinou hodnotu pro $p = 0$ (Komb(0, 0)), druhý hodnoty pro $p = 1$ (Komb(1, 0) a Komb(1,1)), třetí pro $p = 2$ (Komb(2, 0, Komb(2, 1), Komb (2, 2)) atd. Každý řádek začíná a končí číslem 1, vnitřní čísla (vyskytují až od třetího řádku, tedy pro $p \geq 2$) jsou součtem dvou čísel, která jsou nad nimi zleva a zprava

Hodnoty funkce Kombsym se pohodlně počítají v Excelu. Předpokládejme, že je chceme vyjádřit pro $r \leq R$, $s \leq S$. Vytvoříme tabulku o $R + 1$ řádcích a $N + 1$ sloupcích, do jejího prvního řádku (předpokládejme, že je to řádek 1) a do jejího prvního sloupce (sloupec A) zadáme 1, do pole B2 zapíšeme =A2+B1, a tuto relativní hodnotu okopírujeme do celé tabulky. Na průsečíku r-tého řádku a s-tého sloupce tabulky bude hodnota Kombsym(r-1, s-1). Pokud $R = S$, vznikne symetrická matice. Dále uvádíme příklad pro $R = S = 7$ (Tab. 1 a tab 2).

Tab. 1. Tvorba tabulky funkce Kombsym:

1	1	1	1	1	1	1	1
1	=a2+b1						
1							
1							
1							
1							
1							
1							
1							

Tab. 2. Tabulka funkce Kombsym (hodnoty, které jsou i ve výše uvedeném Pascalově trojúhelníku, jsou uvedeny výraznějším písmem):

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	8
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	28	36
1	**4**	**10**	**20**	**35**	56	84	120
1	**5**	**15**	**35**	70	126	210	330
1	**6**	**21**	56	126	252	462	792
1	**7**	28	84	210	462	924	1 716
1	8	36	120	330	792	1 716	3 432

2. Simplexová čísla[1]

Simplexová čísla řádu 0 jsou čísla

$$a_{n,0} = 1 \tag{2.1}$$

Simplexová čísla řádu *k* ($k>0$) jsou čísla

$$a_{n,k} = \Sigma_{j=0}^{n}\, a_{j,k\text{-}1}. \tag{2.2}$$

Tedy simplexová čísla řádu 0 tvoří konstantní posloupnost {1, 1, 1, 1, … }, simplexová čísla řádu 1 tvoří posloupnost všech nenulových přirozených čísel { 1, 2, 3, 4, … }, tedy $a_{n,1} = n + 1$, simplexová čísla řádu 2 tvoří posloupnost **trojúhelníkových čísel** {1, 3, 6, 10, … }[2]; zde

$$a_{n,2} = \Sigma_{j=0}^{n}\, a_{j,1}$$

volba termínu *trojúhelníkové číslo* je patrná z následujícího obrázku:

[1] Dvojrozměrný simplex je trojúhelník, trojrozměrný simplex je trojboký jehlan atd. Čtyřrozměrný simplex má tedy 5 vrcholů a jeho trojrozměrné stěny jsou trojboké jehlany.

[2] Připomínám, že indexování začínáme 0. Nabízí se definovat posloupnosti simplexových čísel tak, že by začínaly 0 a pak pokračovaly se smyslu uvedené definice. V původní verzi tohoto textu tomu tak bylo. Něco by se tím zjednodušilo, ale něco také zkomplikovalo (např. výraz **(2.10)**).

		Počet kuliček od začátku
	n	$a_{n,2}$
●	0	1
● ●	1	3
● ● ●	2	5
● ● ● ●	3	8
● ● ● ● ●	4	12
● ● ● ● ● ●	5	17
● ● ● ● ● ● ●	6	23
● ● ● ● ● ● ● ●	7	30
● ● ● ● ● ● ● ● ●	8	38
● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	9	47

Pro trojúhelníková čísla platí (je to patrné i z výše uvedeného obrázku)

$$a_{n,2} = (n + 1)(n + 2)/2$$

Můžeme si představit, že takovéto "trojúhelníky" klademe na sebe a budeme vytvářet trojboké jehlany (trojrozměrné ***simplexy***), dostaneme se tak k simplexovým číslům řádu 3: {1, 4, 10, 20, 35, ...}.

Napíšeme-li ve vztahu (2.2) poslední sčítanec samostatně, dostaneme obecné vyjádření

$$a_{n,k} = \Sigma_{j=0}^{n} a_{j,k\text{-}1} = \Sigma_{j=0}^{n\text{-}1} a_{j,k\text{-}1} + a_{n,k\text{-}1} = a_{n\text{-}1,k} + a_{n,k\text{-}1} \,. \qquad (2.3)$$

V uvedených příkladech pro $k \leq 3$ platí

$$a_{0,k} = 1, \qquad (2.4)$$

Triviálním použitím matematické indukce dokážeme, že vztah (2.4) platí obecně pro všechna k. Z definice (2.1) plyne, že $a_{0,0} = 1$, a podle vztahu (2.2) pro $k > 0$ je

$$a_{0,k} = \Sigma_{j=0}^{0} a_{j,k\text{-}1} = a_{0,k\text{-}1}, \qquad (2.5)$$

tedy skutečně pro všechny indexy k platí (2.4).

Ze vztahů (2.1) a (2.4) plyne, že pokud $n = 0$ nebo $k = 0$, platí (viz (1.6))

$$a_{n,k} = \text{Kombsym}\,(n, k) = 1 \qquad (2.6)$$

Rekurentní vzorec (1.5) pro výpočet hodnot funkce Kombsym(r, s) a rekurentní vzorec (2.3) pro výpočet hodnot $a_{n,k}$ jsou obsahem stejné, a tedy pro $n > 0$ platí obecně

$$a_{n,k} = \text{Kombsym}\,(n, k) \qquad (2.7)$$

Na čísla $a_{n,k}$ se můžeme dívat jako na členy **simplexové posloupnosti**

$$A_k = \{a_{0,k}, a_{1,k}, a_{2,k}, a_{3,k}, \ldots\}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Z jejich definice vůbec není patrná symetrie v obou indexech. Naproti tomu to, že funkce Kombsym symetrická je, je patrné okamžitě z definice vztahem (1.2). Vztah (2.7) ovšem ukazuje, že pro všechna $k \in \mathcal{N}, n \in \mathcal{N}$ platí

$$a_{n,k} = a_{k,n} \tag{2.8}$$

Tabulka 3 ukazuje prvních 16 členů posloupností A_0, A_0, …, A_8. Tučně jsou v ní vyznačena lichá čísla. Paritou čísel (sudá, lichá) se budeme dále zabývat.

Tab. 3. Začátky posloupností simplexových čísel řádu 0 až 8
s vyznačením lichých čísel

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n									
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	**9**
2	**1**	**3**	6	10	**15**	**21**	28	36	**45**
3	**1**	4	10	20	**35**	56	84	120	**165**
4	**1**	**5**	**15**	**35**	70	126	210	330	**495**
5	**1**	6	**21**	56	126	252	462	792	**1287**
6	**1**	**7**	28	84	210	462	924	1716	**3003**
7	**1**	8	36	120	330	792	1716	3432	**6435**
8	**1**	**9**	**45**	**165**	**495**	**1287**	**3003**	**6435**	12870
9	**1**	10	**55**	220	**715**	2002	**5005**	11440	24310
10	**1**	**11**	66	286	**1001**	**3003**	8008	19448	43758
11	**1**	12	78	364	**1365**	4368	12376	31824	75582
12	**1**	**13**	**91**	**455**	1820	6188	18564	50388	125970
13	**1**	14	**105**	560	2380	8568	27132	77520	203490
14	**1**	**15**	120	680	3060	11628	38760	116280	319770
15	**1**	16	136	816	3876	15504	54264	170544	490314

3. Parita simplexových čísel

Dále se budeme v jednotlivých posloupnostech A_k zabývat periodicitou výskytu sudých a lichých čísel, podílem lichých čísel v periodě a jejich rozložením uvnitř periody. Paritu pro začátky posloupností $A_k = \{a_{n,k}\}$ ($k \in \langle 0, 17 \rangle$, $n \in \langle 0, 21 \rangle$) ukazuje tab. 4, v níž kde 0 značí sudá čísla a 1 lichá čísla. Základní perioda je vyznačena žlutým podtiskem, členy posloupností A_{16} a A_{16} , u nichž se do tabulky nevejde základní perioda celá, jsou vyznačeny nevýrazně růžovým podtiskem. V prvním řádku tabulky 4 je uvedena pro jednotlivé posloupnosti A_k délka periody, v druhém řádku počet lichých čísel v periodě a ve třetím řádku podíl lichých čísel v periodě, vyjádřený počtem čtyřiašedesátin.

Tab. 4. Parita simplexových čísel

Perioda	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16	16	16	16	16	16	16	32	32
1 v periodě	1	1	2	1	4	2	2	1	8	4	4	2	4	2	2	1	16	8
64*Podíl 1 v periodě	64	32	32	16	32	16	16	8	32	16	16	8	16	8	8	4	32	16
n↓ k->	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
3	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
5	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
7	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
8	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
11	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
13	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
14	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
17	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
18	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
19	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
20	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
21	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Základní perioda

neukončená zákl.perioda

Uveďme nyní, co je z tabulky patrné pro hodnoty k v ní uvedené, přičemž lze předpokládat, že tyto vztahy platí obecně.

Perioda pro k: nechť $L(k) = \mathrm{ceil}(\mathrm{lb}(k + 1))$, přičemž lb je binární logaritmus a ceil(x) značí nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno číslu x.

Perioda pro paritu v posloupnosti A_k simplexových čísel řádu k je $2^{L(k)}$.

Další text se připravuje

Praha 4.3.2025