MacLaurinovy řady

Znalost MacLaurinových[1] rozvojů (tj Taylorových[2] rozvojů kolem 0) některých funkcí patří k základnímu know-how v matematické analýze. Nemyslím tím, že by všechny uvedené rozvoje čtenář znal, a proto je zde uvádím. Uvedu i rozvoj dvou hyperbolických a jedné hypebolometrické funkce; sh, ch a argth označují po řadě hyperbolický sinus, hyperbolický kosinus a hyperbolický (či hyperbolometrický) argumenttangens[3]. Tyto tři funkce se v učebnicích často neuvádějí, protože je lze vyjádřit pomocí dalších známých funkcí[4]; jejich Maclaurinovy rozvoje však stojí za to být zde uvedeny.

$\exp x = e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ x^n/\ n!\ ;\ x \in \mathcal{R}$

$\exp(-x) = e^{-x} = 1 - x + x^2/2! - x^3/3! + x^4/4! + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ (-1)^n\, x^n/\ n\ ;\ x \in \mathcal{R}!$

$\mathrm{sh}\, x = (e^x - e^{-x})/2 = x + x^3/3! + x^5/5! + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ x^{2n+1}/\ (2n+1)!\ ;\ x \in \mathcal{R}$

$\mathrm{ch}\, x = (e^x + e^{-x})/2 = 1 + x^2/2! + x^4/4! + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ x^{2n}/\ (2n)!\ ;\ x \in \mathcal{R}$

$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ (-1)^n\, x^{2n+1}/\ (2n+1)!\ ;\ x \in \mathcal{R}$

$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ (-1)^n\, x^{2n}/\ (2n)!\ ;\ x \in \mathcal{R}$

$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - \dots = \Sigma_{n=1}^{\infty}\ (-1)^{n-1}\, x^n/\ n\ ;\ x \in (-1; 1\rangle$

$\mathrm{arctg}\, x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 \dots = \Sigma_{n=1}^{\infty}\ (-1)^{n-1}\, x^{2n+1}/\ (2n+1);\ x \in (-1; 1\rangle$

$\mathrm{argth}\, x = x + x^3/3 + x^5/5 + x^7/7 \dots = \Sigma_{n=1}^{\infty}\ x^{2n+1}/\ (2n+1);\ x \in (-1; 1)$

Vybrané úlohy

1. Sečíst číselnou řadu

$r_1 = 1 + 1/2 - 1/3 - 1/4 + 1/5 + 1/6 - 1/7 - 1/8 + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ (-1)^{[n/2]}/(n+1)$

Řada r_1 je součtem řad

$r_3 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ (-1)^n/(2n+1)$

a

$r_4 = 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ (-1)^n/(2(n+1)) =$

$= (1/2)\ (1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots) = (1/2)\ \Sigma_{n=0}^{\infty}\ (-1)^n/(n+1)$

$= (1/2)\ \Sigma_{n=1}^{\infty}\ (-1)^{n-1}/n$

[1] **Colin Maclaurin** (1698-1746) byl skotský matematik, abslovent glasgowské university, profesor edinburské univerzizy, blízký spolupracovník Newtonův.

[2] **Brook Taylor** (1685-1731) byl anglický matematik; studoval v Cambridge.

[3] V článku *Hyperbolické a hyperbolometrické funkce* je argumenttangens hyperbolický označován ath. Podobně jako v onom článku názvy funkcí končící na souhlásku považujeme za maskulina.

[4] sh x = (exp x – exp $(-x)$)/2; ch x = (exp x + exp $(-x)$)/2; argth $x = \ln \sqrt{((1+x)/(1-x))}$; sh a argth jsou liché funkce; ch je sudá funkce. Pro jejich definiční obory $\mathcal{D}$ a obory hodnot $\mathcal{H}$ platí $\mathcal{D}$ (sh) = $\mathcal{D}$ (ch) = $\mathcal{H}$ (sh) = $\mathcal{H}$ (argth) = $\mathcal{R}$ (množina všech reálných čísel), $\mathcal{D}$ (argth) = (-1; 1), $\mathcal{H}$ (ch) = (1; ∞).

Využijme nyní MacLaurinových rozvojů

arctg $x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 \dots = \Sigma_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n+1}/(2n+1); x \in (-1; 1\rangle$

a

$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - \dots = \Sigma_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n/n$; $x \in (-1; 1\rangle$

Dosadíme $x = 1$ a dostaneme

$\Sigma_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n = \ln 2$,

$\Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(2n+1) = \text{arctg } 1 = \pi/4$.

To znamená, že

$r_3 = \text{arctg } 1 = \pi/4$,

$r_4 = (1/2) . \ln 2 = \ln \sqrt{2}$,

a tedy

$r_1 = \pi/4 + \ln \sqrt{2}$.

2. Sečíst číselnou řadu

$r_2 = 1 - 1/2 - 1/3 + 1/4 + 1/5 - 1/6 - 1/7 + 1/8 + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^{[(n+1)/2]}/(n+1)$

Podobně řada r_2 je rozdílem řad

$r_3 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(2n+1)$

a

$r_4 = 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(2(n+1)) =$

$= (1/2) (1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots) = (1/2) \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(n+1)$

$= (1/2) \Sigma_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$,

a tedy

$r_2 = \pi/4 - \ln \sqrt{2}$.

3. Sečíst mocninné řady

$r_5 = x + x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 + x^6/6 - x^7/7 - x^8/8 + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-x)^{[n/2]}/(n+1)$

a

$r_6 = x - x^2/2 - x^3/3 + x^4/4 + x^5/5 - x^6/6 - x^7/7 + x^8/8 + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-x)^{[(n+1)/2]}/(n+1)$

Postup výpočtu jsme ukázali při výpočtu r_1 a r_2. Platí tedy

$r_5 = x + x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 + x^6/6 - x^7/7 - x^8/8 + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-x)^{[n/2]}/(n+1) =$

$= \text{arctg } x + \ln \sqrt{(1 + x)}$,

$r_6 = x - x^2/2 \; - \; x^3/3 + x^4/4 + x^5/5 \; - \; x^6/6 - x^7/7 \; + x^8/8 + \dots = \Sigma_{n=0}^{\infty} \; (-x)^{[(n+1)/2]}/(n+1) =$

$= \text{arctg } x \; - \ln \; \sqrt{(1 + x)}$.

Oborem konvergence řad r_5 a r_6 je uzavřený interval ⟨-1; 1⟩, přičemž oborem jejich absolutní konvergence je otevřený interval (-1, 1). Ve většině úloh na sčítání mocninných řad nastává, že pokud je oborem konvergence uzavřený interval, je tento interval zároveň oborem absolutní konvergence. Příklady uvedené v úloze **3** ukazují či dokonce varují, že tomu tak být nemusí.

Praha 12.02.2024