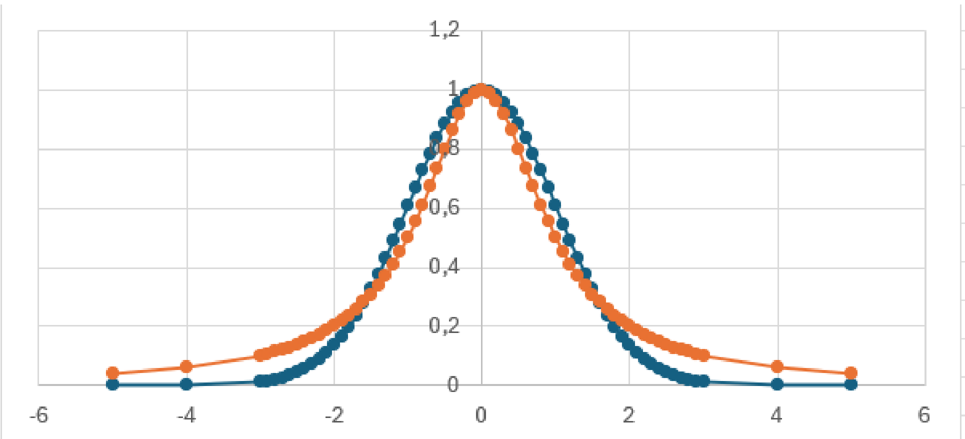
Řípové funkce

Prosím čtenáře, aby se nezalekl mnou vymyšleného termínu pro funkce, jejichž graf připomíná kultovní českou horu Říp[1], byť zpravidla s ostřejším vrcholem; tedy jde o hladké sudé funkce f, pro něž platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

na intervalu $\langle 0, \infty)$ jsou klesající a existuje takové číslo a, že na intervalech $(-\infty; a)$ a $(a; \infty)$ jsou konvexní a na intervalu $(-a, a)$ konkávní.

Říp



Dvě řípové funkce

[1] Výrazné hory s nepříliš velkou nadmořskou výškou mám rád. Mám radost, že jsem navštívil nejvyšší estonskou horu Suur Munamägi (317 m), jejíž vrchol má značně menší nadmořskou výšku než vrchol Řípu (461 m). Horu Říp mi připomínalo i příjmení mé někdejší dobré studentky E. Řípové, i když jsem si uvědomoval, že její příjmení spíše souvisí se zemědělskou plodinou a ona sama nepocházela z Podřipska, nýbrž z okolí jiné české kultovní hory Blaníku. U funkcí, o nichž píšu, se myšlenkám na nápadný vrch na jihu Ústecké kraje nevyhnu.

Při porovnání obrázků nás asi nejdříve napadne, že vrchol hory Říp je mírný, jeho obrys v okolí vrcholu málo zakřivený, kdežto grafy řípových funkcí mají kolem vrcholu poměrně velkou křivost. Výraznější rozdíl, totiž že máme sice grafy řípových funkcí zakreslené jen od -5 do 5, ale lze je na obě strany neomezeně prodlužovat, zatímco něco podobného s průmětem hory Říp, nalézající se na planetě Zemi s konečným poloměrem, dělat nelze.

Zastavíme se u tří řípových funkcí, přičemž hlavním bodem zájmu bude plocha mezi grafem funkce a osou x (grafy dvou z nich jsou na výše uvedeném obrázku). Budou to funkce

$f_1(x) = \exp(-x^2/2)$ (na obrázku zelenomodře),

$f_2(x) = 1/(1 + x^2)$ (na obrázku žlutohnědě),

$f_3(x)= 1/\sqrt{(1 + x^2)}$.

Všechny tyto funkce jsou definovány na množině $\mathcal{R}$ všech reálnách čísel, v nevlastních bodech mají limitu 0 a v bodě 0 funkčí hodnotu 1. Věnujme se jim blíže.

První derivace

$f_1'(x) = -x \exp(-x^2/2)$

$f_1'(x) = 0$ pro $x = 0$

$f_1'(x) < 0$ pro $x > 0$

$f_1'(x) > 0$ pro $x < 0$

$f_2'(x) = -2x/(1 + x^2)^2$

$f_2'(x) = 0$ pro $x = 0$

$f_2'(x) < 0$ pro $x > 0$

$f_2'(x) > 0$ pro $x < 0$

$f_3'(x) = -x/(1 + x^2)^{3/2}$

$f_3'(x) = 0$ pro $x = 0$

$f_3'(x) < 0$ pro $x > 0$

$f_3'(x) > 0$ pro $x < 0$

Ve všech třech případech hodnoty prvních derivací odpovídají požadavkům, které mají řípové funkce splňovat.

Druhé derivace

$f_1''(x) = (x^2 - 1) \exp(-x^2/2)$

$f_1''(0) = -1$

$f_1''(x) = 0$ pro $|x| = 1$

$f_1''(x) < 0$ pro $x \in (-1; 1)$

$f_1''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

Inflexní body: -1; 1

$f_2''(x) = (6x^2 - 2)/(1 + x^2)^3$

$f_2''(0) = -2$

$f_2''(x) = 0$ pro $|x| = 1/\sqrt{3}$

$f_2''(x) < 0$ pro $x \in (-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$

$f_2''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}; \infty)$

Inflexní body: $-1/\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$

$f_3''(x) = (2x^2 - 1)/(1 + x^2)^{5/2}$

$f_3''(0) = -1$

$f_3''(x) = 0$ pro $|x| = 1/\sqrt{2}$

$f_3''(x) < 0$ pro $x \in (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$

$f_3''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}; \infty)$

Inflexní body: $-1/\sqrt{2}$; $1/\sqrt{2}$

Druhé derivace ukazují, že všechny tři funkce splňují požadavky na konkávnost a konvexnost funkcí; dále jsme určili polohu inflexních bodů

Plocha pod grafem funkce

$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{(2\pi)} \approx 2{,}507$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (1/(1+x^2))\,\mathrm{d}x = [\mathrm{arctg}\, x]_{-\infty}^{\infty} = \pi = 3{,}142$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_3(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (1/\sqrt{(1+x^2)})\,\mathrm{d}x) = [\mathrm{ash}\, x]_{-\infty}^{\infty} = \infty$

K funkci f_1 neexistuje taková primitivné funkce, již by šlo vyjádřit pomocí elementárních funkcí; k výpočtu uvedeného nevlastního integrálu je nutno použít vhodný speciální obrat.

Funkce f_2 je derivací funkce arctg.

Informaci o primitivní funkci k f_3 lze najít v mém článku *Hyperbolické a hyperbolometrické funkce*.

Plochy pod grafy funkcí f_1 a f_2 jsou konečné (a nijak výrazně se neliší; plocha pod grafem funkce f_2 je přibližně o 25 % větší než plocha pod grafem funkce f_1). Naproti tomu plocha pod grafem funkce f_3 konečná není.

Na poslední stránce v obrázku nahoře jsou porovnány grafy šestinásobků[2] našich tří sledovaných funkcí. Optické porovnání obrázků je v souladu s tím, jak se plocha pod grafem f_3 liší od ploch pod grafy předchozích dvou funkcí. Aby však čtenář nepodlehl představě, že konečnost či nekonečnost plochy pod grafem se pozná z obrázku, který nutně funkci (přesněji: její graf) znázorňuje jen na nějakém omezeném intervalu, uveďme ještě tuto řípovou funkci

$$f_4(x) = 1/(1+x^2)^{0{,}55}$$

Za již zmíněným obrázkem na poslední stránce následuje další obrázek, v němž je šedě znázorněn graf šestinásobku funkce f_4 a zároveň je tam modře znárorněn graf funkce f_3, o níž víme, že plocha pod jejím grafem je nekonečná. Grafy se liší jen nepatrně[3]. Při tom však (využíváme, že f_4 je sudá funkce)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_4(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} 1/(1+x^2)^{0{,}55}\,\mathrm{d}x =$$

[2] Tím změníme měřítko na ose y

[3] Inflexní body funkce f_4 jsou $-1/\sqrt{2{,}2}$ a $1/\sqrt{2{,}2}$

$$=2 \int_0^\infty 1/(1+x^2)^{0,55}\,dx \;\leq\; 2\int_0^\infty 1/\max(1;x^2)^{0,55}\,dx =$$

$$= 2\left(\int_0^1 1/\max(1;x^2)^{0,55}\,dx + \int_1^\infty 1/\max(1;x^2)^{0,55}\,dx\right) =$$

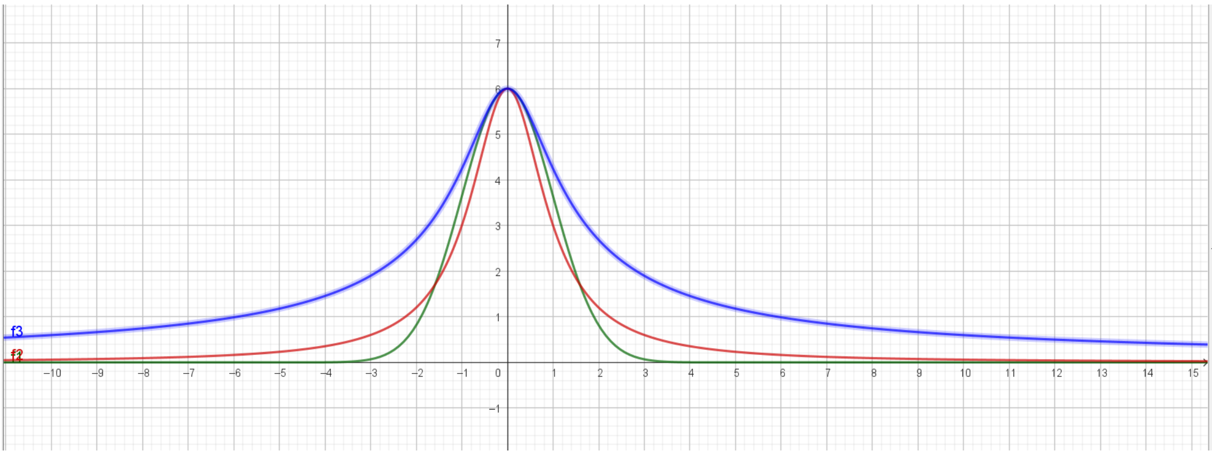
$$= 2\left(\int_0^1 1/1^{0,55}\,dx + \int_1^\infty 1/(x^2)^{0,55}\,dx\right) =$$

$$= 2\left(\int_0^1 1\,dx + \int_1^\infty x^{-1,1}\,dx\right) = 2\left(1 + (1/(-0,1))\left[x^{0,1}\right]_1^\infty\right) =$$

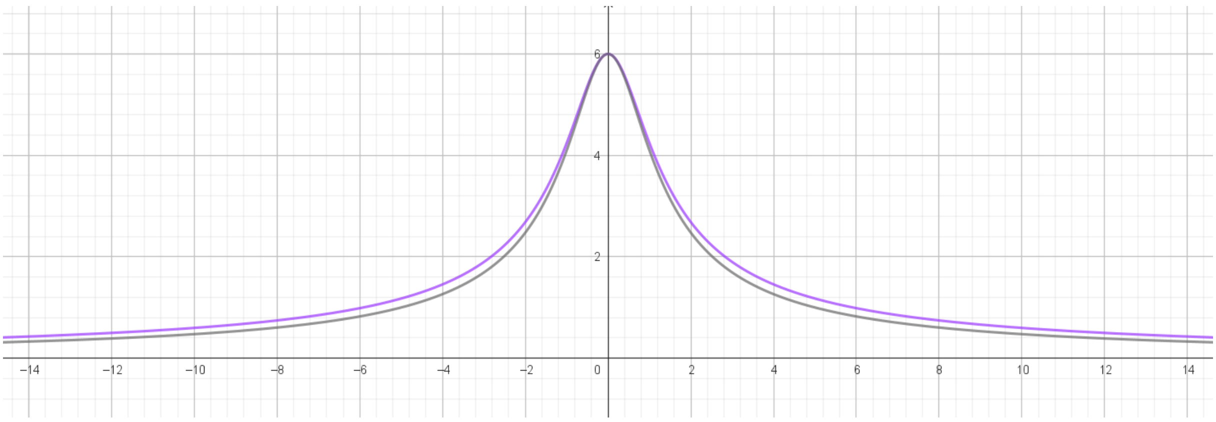
$$= 2\left(1 - 10.\left[0-1\right]\right) = 2\,.\,11 = \mathbf{22}$$

Tedy plocha mezi osou x a grafem funkce f_4 je konečná! Na první pohled téměř stejné funkce, a při tom se v té pro nás nejzajímavější vlastnosti liší!

Je však čemu se divit? Vždyť to úzce souvisí se známou skutečností, že $\int_1^\infty 1/x^n\,dx = \infty$, resp. $< \infty$, právě když $n \leq 1$, resp. $n > 1$. Ano, ale když porovnáme grafy funkcí f_3 a f_4, pak ten údiv je na místě, i když jde o skutečnost jednoduše vysvětlitelnou. Schopnost divit se patří k lásce k matematice, která přesahuje materiální, smysly vnímatelný svět. Přichází mi při tom na mysl obdiv k celému Božímu stvořitelskému dílu, obdiv, který patří k plně prožívanému lidskému životu.



Grafy šestinásobků funkcí f_1, f_2 a f_3



Grafy šestinásobků funkcí f_3 a f_4