Magická krása pravidelného pětiúhelníka

J. Nečas

Abstract. The article presents various interesting relations in a regular pentagon and then expresses the values of goniometric functions for the multiples of 18^o.

Klíčová slova. Pětiúhelník, podobnost trojúhelníků, výška pětiúhelníku, obsah pětiúhelníku, úhly v pětiúhelníku.

Označení a úmluvy

Budeme se věnovat pravidelnému pětiúhelníku *ABCDE* s délkou strany rovnou 1. Má 5 stejně dlouhých po dvou různoběžných úhlopříček (*AC, AD, BD, BE, CE*); jejich délku označíme *u*.

Úhlopříčky mají celkem 10 průsečíků; kromě 5 vrcholů to jsou body

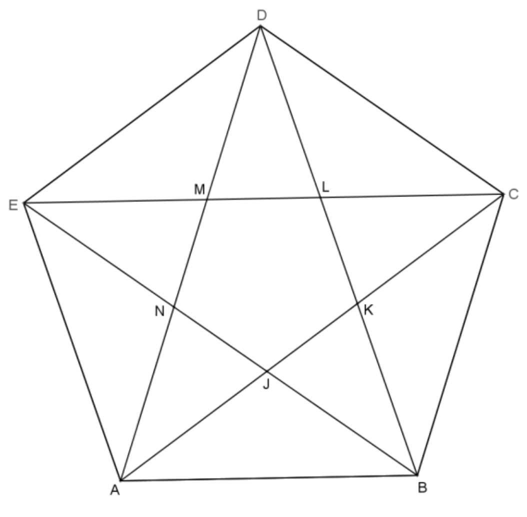
$J = BE.AC$

$K = BD.AC$

$L = BD.CE$

$M = AD.CE$

$N = AD.BE$



Pro úhel budeme používat symbol $\angle$.

Poznamenejme, že unární operace √ má vyšší prioritu než jakákoli binární operace, tedy $\sqrt{}a/b$ znamená totéž jako $(\sqrt{a})/b$

<u>Elementární tvrzení</u>

Pravidelný pětiúhelník má při každém vrcholu vnitřní úhel 108°.

Úhel mezi stranou a úhlopříčkou a ve vrcholu mezi úhlopříčkami:

Trojúhelník *EAB* je rovnoramenný, úhel při vrcholu je 108°, mezi základnou a rameny tedy je nutně 36°. Protože strany ve vrcholu spolu svírají 108° a úhel mezi stranou a nejbližší úhlopříčkou je 36°, je nutně i úhel mezi úhlopříčkami při vrcholu 36°

Úhly mezi úhlopříčkami uvnitř pětiúhelníka:

Trojúhelník *AJB* je rovnoramenný se základnou, jíž je strana *AB*. Úhly v něm při vrcholech *A* a *B* jsou 36°, tedy $\angle\ AJB = 108°$. Protože $\angle\ AJN$ je jeho doplněk do 180°, je jeho velikost 72°. V rovnoramenném trojúhelníku JAN tedy svírají ramena se základnou úhel 72°; pro kontrolu: $\angle\ JAN = 36°$.

Každá strana je rovnoběžná právě s jednou úhlopříčkou.

<u>Délka úhlopříčky</u>

Z úvah, které jsme udělali pro úhly, plyne, že *JEDC* je rovnoběžník. Protože délka strany pětiúhelníka je 1, je nutně i $EJ = CJ = 1$

Označme $AJ = EN = x$

Platí $JN = EJ - EN = 1 - x$

Z podobnosti trojúhelníků *AJN* a *ACD* plyne:

(1) $$u : 1 = x : (1 - x)$$

Protože $BJ = EN$, je $u = 1 + x$, tedy

(2) $$x = u - 1,$$

a tedy

(3) $$JN = 1 - x = 2 - u.$$

Dosadíme-li to do výše uvedené úměry, máme

$$u : 1 = (u - 1) : (2 - u),$$

a tedy

$$u.(2 - u) = u - 1,$$

odkud po úpravě dostaneme pro u kvadratickou rovnici

(4) $$u^2 - u - 1 = 0,$$

jejímž kladným řešením je

(5) $$(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618,$$

což je ***koeficient ε zlatého řezu***, který má různé zajímavé vlastnosti, z nichž uveďme:

- Geometrická posloupnost s kvocientem ε je Fibonacciovou posloupností [1].
- Platí

(6) $$\varepsilon^{-1} = \varepsilon - 1.$$

---

[1] ***Fibonacciovou posloupností*** $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ rozumíme takovou posloupnost s reálnými členy, která není tvořena samými nulami a v níž pro všechny indexy k platí $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$. Pro každou Fibonacciovu posloupnost s celočíselnými členy platí vztah $\lim a_{k+1}/a_k = \varepsilon$. Pro každou Fibonacciovu posloupnost s reálnými členy platí: $\lim a_{k+1}/a_k = \varepsilon$ nebo jde o geometrickou posloupnost s kvocientem $-\varepsilon^{-1}$.

Hodnoty goniometrických funkcí pro násobky 18^o

Aplikujme kosinovou větu na trojúhelník *EAB* s vybraným úhlem *EAB*:

(7) $u^2 = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 108^o =$

$= 1^2 + 1^2 + 2.1.1.\cos 72^o = 2.(1 + \cos 72^o)$

Odtud dostaneme, že

(8) $\cos 72^o = \sin 18^o = (\sqrt{5} - 1)/4 \approx 0{,}309.$

Ze známé identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dostaneme:

(9) $\sin 72^o = \cos 18^o = \sqrt{(10 + 2.\sqrt{5})} / 4 \approx 0{,}951$

Hodnoty goniometrických funkcí pro 36^o a 54^o získáme ze vztahu (8) pomocí známého vyjádření funkcí polovičního argumentu:

(10) $\sin 36^o = \cos 54^o = \sqrt{((5 - \sqrt{5})/8)} \approx 0{,}588,$

(11) $\cos 36^o = \sin 54^o = \sqrt{((3 + \sqrt{5})/8)} \approx 0{,}809$

Poloměry opsané a vepsané kružnice

Označme *S* střed pravidelného pětiúhelníku a označme *Q* střed strany AB. V pravoúhlém trojúhelníku *AQS* s přeponou *AS* známe délku odvěsny $AQ = 1/2$ a úhly $\angle SAQ = 54^o$, $\angle ASQ = 36^o$. Přitom pro poloměry kružnice opsané a vepsané platí po řadě $r = AS$, $\rho = QS$. Poloměr opsané kružnice vyjádříme snadno pomocí sinu 36^o:

(12) $r = AS = AQ / \sin 36^o = 1/(2.\sin 36^o) =$

$$= \sqrt{(2/(5 - \sqrt{5}))} = \sqrt{((5 + \sqrt{5})/10)} \approx 0{,}851$$

Toto vyjádření použijeme, abychom vyjádřili poloměr $\rho = QS$ kružnice pravidelnému pětiúhelníku (stále se stranou 1) vepsané:

(13)
$$\rho = QS = r.\cos 36^{o} =$$

$$= \sqrt{((5 + \sqrt{5})/10)}.\ \sqrt{((3 + \sqrt{5})/8)} =$$

$$= \sqrt{((20 + 8\sqrt{5})/5)}\ /\ 4 \approx 0{,}688$$

Výška v pravidelném pětiúhelníku

Výškou v rozumíme vzdálenost vrcholu od jemu protilehlé strany. Lze ji na základě uvedených veličin vyjádřit různými způsoby, např. $v = r + \rho$; jednodušší postup však je aplikovat Pythagorovu větu na trojúhelník AQD, v němž $\angle\ AQD$ je pravý; AD je přepona a QD výška, QD = v. Dostaneme

(14)
$$v = \sqrt{(u^2 - (1/2)^2)} =$$
$$= \sqrt{(5 + 2.\sqrt{5})}\ /\ 2 \approx 1{,}539$$

Obsah pravidelného pětiúhelníka

Můžeme jej vyjádřit jako pětinásobek obsahu P_T rovnoramenného trojúhelníka, jehož základnu tvoří strana pětiúhelníka a ramena jsou spojnice vrcholů se středem a mají délku r; vrcholový úhel je 72^{o}.

(15)
$$P_T = r^2.\sin 72^{o}\ /2 =$$
$$= ((5 + \sqrt{5})/10).\sqrt{(10 + 2.\sqrt{5})}/8 =$$
$$= ((5 + \sqrt{5})).\sqrt{(10 + 2.\sqrt{5})}/80 \approx 0{,}344,$$

a tedy obsah P_5 pravidelného pětiúhelníka se stranou o délce 1 je

(16) $$P_5 = ((5 + \sqrt{5})).\sqrt{(10 + 2.\sqrt{5})/16} \approx 1{,}720$$

Porovnejme tuto hodnotu se známějšími **obsahy P_n pravidelných n-úhelníků se stranou 1**, kde n leží v množině {3, 4, 6}:

(17) $P_3 = \sin 60^o/2 = \sqrt{3} / 4 \approx 0{,}433$

(18) $\boldsymbol{P_4 = 1}$

(16) $P_5 = ((5 + \sqrt{5})).\sqrt{(10 + 2.\sqrt{5})/16} \approx 1{,}720$

(19) $P_6 = 6.P_3 = 3.\sqrt{3} / 2 \approx 2{,}598$

Zde svou procházku po vlastnostech pravidelného pětiúhelníku ukončíme v naději, že aspoň některé z nich, například možnost určit hodnoty goniometrických dukcí pro násobky 18^o, čtenář shledal zajímavými a stojícími za pozornost.

RNDr. Jiří Nečas
Department of Mathematics
University of Economics
Ekonomická 957
148 00 Prague 4
e-mail: *necas@vse.cz*