# Zamyšlení nad hodnotami Eulerovy funkce

Tento článek se blíže věnuje některým myšlenkám z článku *Hodnoty Eulerovy funkce* . Počítám s jeho postupným upravováním.

## 0. Označení

$\mathcal{N}_0$ – množina všech přirozených čísel (včetně 0),

$\mathcal{N}$ – množina všech nenulových přirozených čísel

$\mathcal{P}$ – množina všech prvočísel

$\mathcal{H}$ – množina všech hodnot dané funkce

$\subset$ – podmnožina (s vyloučením rovnosti)

$\subseteq$ – podmnožina (s možností rovnosti)

## 1. Pojmy

Pro $i \in \mathcal{N}$ definujeme $\varphi(n)$ jako počet přirozených čísel, která jsou menší nebo rovná $n$ a jsou s $n$ nesoudělná. Funkci nazýváme ***Eulerovou funkcí***.

V oboru hodnot $\mathcal{H}(\varphi)$ Eulerovy funkce leží jediné liché číslo, a to 1; $1 = \varphi(1) = \varphi(2)$. Některá sudá čísla jsou hodnotami Eulerovy funkce, některá nikoli. Mezi stem sudých čísel, jež jsou menší nebo rovná 200, neleží v $\mathcal{H}(\varphi)$ těchto 29 sudých čísel:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 26 | 34 | 38 | 50 | 62 | 68 | 74 | 76 | 86 |
| 90 | 94 | 98 | 114 | 118 | 122 | 124 | 134 | 142 | 146 |
| 152 | 154 | 158 | 170 | 174 | 182 | 186 | 188 | 194 | |

Dále pro $i \in \mathcal{N}$ definujeme ***relativní Eulerovu funkci*** $\Phi(n)$ jako podíl $\varphi(n)/n$. Její převrácenou hodnotu $1/\Phi(n)$nazveme ***Hildegardinou funkcí*** $\mathrm{Hi}(n)$, tedy

$$\Phi(n) = \varphi(n)/n,$$
$$\mathrm{Hi}(n) = n/\varphi(n).$$

Platí

$$\mathcal{H}(\Phi) \subset (0; 1\rangle,$$
$$\mathcal{H}(\mathrm{Hi}) \subset \langle 1; \infty)$$

Platí zde ostré inkluze, neboť oba obory hodnot na levých stranách jsou spočetné množiny, kdežto intervaly na pravých stranách mají mohutnost kontinua.

Dále definujme funkce *prvofaktoriál* **Prfac**t a *subprvofaktoriál* **SPrf** (druhá z nich je definována jen pro potřeby tohoto článku, případně pozdějších článků s ním souvisejících). Pro $i$-té prvočíslo (v uspořádání podle velikosti) použijme označení $q_i$. Tedy $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, ..., $q_6 = 13$, ...
Položme

$$\mathrm{Prfact}(n) = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n = \Pi_{i=1}^{n} q_i.$$

Tedy Prfact(1) = 2, Prfact(2) = 6, Prfact(3) =30, Prfact(4) = 210, ...
Množinu všech hodnot funkce Prfact označme PRF; tedy

PRF $=_{\text{def}} \mathcal{H}$(Prfact).

Všechny hodnoty funkce Prfact jsou dělitelné dvěma, žádná však není dělitelná 4. Při zápisu v desítkové soustavě mají hodnoty funkce Prfact, které jsou aspoň dvojciferné, jako poslední číslici 0 a jako předposlední 1, 3, 7 nebo 9.
PRF = {2; 6; 30; 210; 2310; 30 030; 510 510; ...}

Pro úvahy kolem Eulerovy funkce zaveďme zmíněný subprvofofaktoriál

$$\text{SPrf}(n) = (q_1-1) \,.\, (q_2-1) \,.\, \ldots \,.\, (q_n-1) = \Pi_{i=1}^{n} (q_i-1).$$

Tedy SPrf(1) = 1, SPrf(2) = 2, SPrf(3) = 8, SPr(4) = 48, ...
Množinu všech hodnot funkce SPrf označme SPR.
Hodnoty funkcí Prfact($n$), Hi(Prfact($n$)) a Sprf ($n$) pro $n \leq 12$ uvádí tabulka 1; je v ní rovněž uveden rozklad hodnot Sprf ($n$) na prvočinitele.

Všechny hodnoty funkce SPrf($n$) pro $n > 1$ jsou dělitelné dvěma, pro $n > 2$ jsou dokonce dělitelné $2^n$.
Zatímco prvočíselný rozklad hodnot funkce Prfact je triviální záležitostí, o prvočíselném rozkladu hodnot funkce SPrf žádné takové tvrzení neplatí.
SPR = {1; 2; 8; 48; 480; 5760; 92 160; ...}

Tab. 1. Funkce Prfact a SPfr pro $n \leq 12$

| | | | | | Prvočíselný rozklad SPrf($n$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | q[$n$] | Prfact($n$) | Hi(Prfact($n$)) | SPrf($n$) | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 6 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 5 | 30 | 3,75 | 8 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 7 | 210 | 4,375 | 48 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 11 | 2 310 | 4,8125 | 480 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 13 | 30 030 | 5,213541667 | 5 760 | 7 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 17 | 510 510 | 5,539388021 | 92 160 | 11 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 19 | 9 699 690 | 5,8471318 | 1 658 880 | 12 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 23 | 223 092 870 | 6,112910518 | 36 495 360 | 13 | 4 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 29 | 6 469 693 230 | 6,331228751 | 1 021 870 080 | 15 | 4 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 31 | 200 560 490 130 | 6,542269709 | 30 656 102 400 | 16 | 5 | 2 | 1 | 1 |
| 12 | 37 | 7 420 738 134 810 | 6,723999423 | 1 103 619 686 400 | 18 | 7 | 2 | 1 | 1 |

Větší prvočinitel než 11 se v rozkladu uvedených hodnot SPrf nevyskytuje

## 2. Výpočet hodnot funkcí φ, Φ a Hi

Nechť

(2.0) $n = (p_1 \wedge k_1).(p_2 \wedge k_2). \dots . (p_m \wedge k_m)$

je prvočíselný rozklad čísla $n$. Platí

(2.1) $\varphi(n) = (p_1 - 1).(p_1 \wedge (k_1 - 1)) . (p_2 - 1).(p_2 \wedge (k_2 - 1)). \dots . (p_m - 1).(p_m \wedge (k_m - 1))$,

a tedy

(2.2) $\Phi(n) = [(p_1 - 1). (p_2 - 1). \dots . (p_m - 1)]/[p_1.p_2. \dots .p_m] =$
$= (1 - p_1^{-1}) . (1 - p_2^{-1}) . \dots . (1 - p_m^{-1})$,

(2.3) $\mathrm{Hi}(n) = [p_1.p_2. \dots .p_m]/[(p_1 - 1). (p_2 - 1). \dots . (p_m - 1)] =$
$= (1 + (p_1-1)^{-1}) . (1 + (p_2-1)^{-1}) . \dots . (1 + (p_m-1)^{-1})$.

Nechť $i \in \mathcal{N}$. Pak ze vztahu (2.1) )plyne

(2.4) $\varphi(\mathrm{Prfact}(i)) = \mathrm{SPrf}(i)$.

Označme

(2.5) $\mathrm{Himax}(n) = \max_{j\in\{1,2,\dots,n\}} \mathrm{Hi}(j)$

Himax je neklesající funkce. Pro každé $n \in \mathcal{N}$ platí:

(2.6) $(\exists i)\ \mathrm{Himax}(n) = \mathrm{Hi}(\mathrm{Prfact}(i))$

(2.7) $\mathcal{H}\ (\mathrm{Himax}) = \mathbf{PRF}$

Hodnotu Prfact($i$), uvedenou v (2.6), nazveme ***prvofaktoriálovým základem*** čísla $n$; označíme ji Pfbas($n$). Hodnoty funkcí Himax($n$) a Pfbas($n$) ($n \le 40$) ukazuje pro ilustraci tabulka 2; jsou v ní uvedeny i hodnoty $\varphi(n)$ a Hi($n$).

Zastavme se u funkce Hi(Prfact($n$)). Platí:

(2.11) $\mathrm{Hi}(\mathrm{Prfact}(n)) = \mathrm{Prfact}(n)/\varphi(\mathrm{Prfact}(n)) =$
$= \Pi_{i=1}^{n} q_i / \Pi_{i=1}^{n} (q_i - 1) = \Pi_{i=1}^{n} (q_i/(q_i - 1)) =$
$= \Pi_{i=1}^{n} (1 + 1/(q_i - 1))$

Hi(Prfact($n$)) je tedy funkce rostoucí; z tabulky 1 je patrno, že její růst se s rostoucím $n$ zpomaluje. Jak dále ukážeme, přesto platí

(2.12) $\lim \mathrm{Hi}(\mathrm{Prfact}(n)) = \infty$

Vraťme se k poslednímu vyjádření ve vztahu (2.11):

(2.13) $\Pi_{i=1}^{n} (1 + 1/(q_i - 1)) > \Pi_{i=1}^{n} (1 + 1/q_i) >$
$> 1 + \Sigma_{i=1}^{n} 1/q_i$

Je známo, že harmonická řada (součet převrácených hodnot přirozených čísel) diverguje. Platí ovšem i silnější tvrzení, totiž že součet převrácených hodnot prvočísel diverguje, tj.

(2.14) $\lim \Sigma_{i=1}^{n} 1/q_n = \infty$,

a tedy

(2.15) $\lim \mathrm{Hi}(\mathrm{Prfact}(n)) = \lim \Pi_{i=1}^{n} (1 + 1/(q_i - 1)) >$

$> \lim \Pi_{i=1}^{n} (1 + 1/q_i) > \lim \Sigma_{i=1}^{n} 1/q_n = \infty$

Tab. 2

| *n* | $\varphi(n)$ | Hi(*n*) | Himax(*n*) | pfbas(*n*) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 1,5 | 2 | 2 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 4 | 1,25 | 2 | 2 |
| 6 | 2 | 3 | 3 | 6 |
| 7 | 6 | 1,167 | 3 | 6 |
| 8 | 4 | 2 | 3 | 6 |
| 9 | 6 | 1,5 | 3 | 6 |
| 10 | 4 | 2,5 | 3 | 6 |
| 11 | 10 | 1,1 | 3 | 6 |
| 12 | 4 | 3 | 3 | 6 |
| 13 | 12 | 1,083 | 3 | 6 |
| 14 | 6 | 2,333 | 3 | 6 |
| 15 | 8 | 1,875 | 3 | 6 |
| 16 | 8 | 2 | 3 | 6 |
| 17 | 16 | 1,063 | 3 | 6 |
| 18 | 6 | 3 | 3 | 6 |
| 19 | 18 | 1,056 | 3 | 6 |
| 20 | 8 | 2,5 | 3 | 6 |
| 21 | 12 | 1,75 | 3 | 6 |
| 22 | 10 | 2,2 | 3 | 6 |
| 23 | 22 | 1,045 | 3 | 6 |
| 24 | 8 | 3 | 3 | 6 |
| 25 | 20 | 1,25 | 3 | 6 |
| 26 | 12 | 2,167 | 3 | 6 |
| 27 | 18 | 1,5 | 3 | 6 |
| 28 | 12 | 2,333 | 3 | 6 |
| 29 | 28 | 1,036 | 3 | 6 |
| 30 | 8 | 3,75 | 3,75 | 30 |
| 31 | 30 | 1,033 | 3,75 | 30 |
| 32 | 16 | 2 | 3,75 | 30 |
| 33 | 20 | 1,65 | 3,75 | 30 |
| 34 | 16 | 2,125 | 3,75 | 30 |
| 35 | 24 | 1,458 | 3,75 | 30 |
| 36 | 12 | 3 | 3,75 | 30 |
| 37 | 36 | 1,028 | 3,75 | 30 |
| 38 | 18 | 2,111 | 3,75 | 30 |
| 39 | 24 | 1,625 | 3,75 | 30 |
| 40 | 16 | 2,5 | 3,75 | 30 |

Protože posloupnost Hi(Prfact($n$)) je vybranou posloupností z posloupnosti Hi($n$), platí

(2.16) $\limsup \mathrm{Hi}(n) = \infty$.

## 3. Množiny $\varphi^{-1}(m)$

Symbolem $\varphi^{-1}(m)$ označíme množinu $\{n \in \mathcal{N} \mid \varphi(n) = m\}$, tedy

$$\varphi^{-1}(m) =_{\mathrm{df}} \{n \in \mathcal{N} \mid \varphi(n) = m\}.$$

Zmínili jsme, že lichá čísla $j$ větší než 1 a také některá sudá čísla $j$ (např. 14, 26, 34, ..., 114, ...) neleží v $\mathcal{H}(\varphi)$, tedy pro ně

$$\varphi^{-1}(j) = \emptyset.$$

Do množiny $\mathcal{H}(\varphi)$ patří všechna *prvočíselně pokrytá* sudá čísla, tj. taková sudá čísla $2t$, že $2t + 1$ je prvočíslo ($2t$ je hodnotou Eulerovy funkce pro toto prvočíslo). Z vyjádření (2.1) čísla s rozkladem (2.0) plyne:
Pokud je číslo k dvojnásobkem lichého prvočísla, $k = 2.p$, pak $k \in \mathcal{H}(\varphi)$ jen tehdy, je-li prvočíselně pokryté; pokud $p > 3$, pak $\varphi^{-1}(k) = \{2.p + 1; 4.p + 2\}$.

Pro dané přirozené číslo $m$ se budeme snažit najít "co nejmenší" interval $I \subset \mathcal{N}$ takový, aby

(3.0) $\varphi^{-1}(m) \subseteq I$

a aby jeho určení nebylo příliš výpočetně komplikované. (Autor si je vědom vágnosti požadavků, kladených na $I$.)

Nechť $n \in \mathcal{N}$. K němu určeme $r \in$ PRF, $r = \mathrm{Prfact}(i)$, $r \le n < r'$, $r' = \mathrm{Prfact}(i + 1)$. Pak

(3.1) $\mathrm{Hi}(n) < \mathrm{Hi}(r')$

Uvažujme nyní přirozené číslo $m$ s prvočíselným rozkladem (2.0). Hodnota Eulerovy funkce $\varphi(m)$ má vyjádření (2.1). Zde mezi čísly $p_i - 1$ může být nanejvýš jedno liché, a to 1 (pokud $p_1 = 2$). Ve součinu (2.1) je proto aspoň $r - 1$ sudých čísel, a tedy v prvočíselném rozkladu čísla $\varphi(m)$ je číslo 2 aspoň v mocnině $r - 1$.

Platí tedy:

Nechť $k = \varphi(m)$. Nechť $s' = \max\{x ; 2^x \mid k\}$. Pak v prvočíselném rozkladu čísla $m$ se vyskytuje nanejvýš $s'$ různých lichých prvočinitelů, a tedy nanejvýš $s = s' + 1$ všech prvočinitelů. Pro číslo $r$ z rozkladu (2.0) tedy platí $r \le s$. Poznamenejme, že k určení hodnoty $s$ je třeba znát $k$, kdežto číslo $m$ znát třeba není.

Příklad: Nechť $k = 18$, tedy platí např. $k = \varphi(54)$. Protože $2|18$, neplatí $4|18$, tedy tedy $s' = 1$, a tak $s = 2$. Přitom $r = 2$.

Označme T($s$) součin

(3.2) $\mathrm{T}(s) = (1 - q_1^{-1}) \dots (1 - q_s^{-1})$

Platí $T(s) \in (0; 1)$, a tedy $1/T(s) \in (1; \infty)$ , viz tab. 3.

Tabulka 3 uvádí čísla $k \in \mathcal{H}(\varphi)$, která jsou menší nebo rovna 60. Je v ní uveden jejich prvočíselný rozklad, přičemž prvočíselně pokrytá čísla tam jsou vyznačena tučně kurzívou. Jsou tam uvedeny i hodnoty $s(k)$, $1/T(s)$, $k/T(s)$ a výčtem prvků také množiny $\varphi^{-1}(k)$. Pro čísla $k \in \mathcal{H}(\varphi) \cap \{1; 2; \ldots; 59, 60\}$ je z tabulky 3 patrná platnost nerovnosti (3.8).

Věnujme se dále hledání intervalu v $\mathcal{N}$, v němž leží pro dané $k \in \mathcal{H}(\varphi)$ celá množina $\varphi^{-1}(k)$ a který není zbytečně velký.

Protože pro libovolné $i$ platí $p_i \geq q_i$ , je $p_i^{-1} \leq q_i^{-1}$ , a tedy $1 - p_i^{-1} \geq 1 - q_i^{-1}$. Opakovaným použitím této nerovnosti dostaneme

(3.3) $\Phi(m) = (1 - p_1^{-1}) \ldots (1 - p_r^{-1}) \geq T(r)$

Protože $s \geq r$, je $T(r) \geq T(s)$, a tak

(3.4) $\Phi(m) = (1 - p_1^{-1}) \ldots (1 - p_r^{-1}) \geq T(s)$.

Tedy

(3.5) $\Phi(m) = \varphi(m)/m \geq T(s)$,

odkud dostáváme

(3.6) $m \leq \varphi(m) / T(s)$.

Označme $\varphi(m) = k$. Pro libovolné $n \in \varphi^{-1}(k)$ tedy platí

(3.7) $n \leq k / T(s(k))$,

a tedy

(3.8) $\max \varphi^{-1}(k) \leq k / T(s(k))$.

Našli jsme tak interval, který splňuje vztah (3.0) včetně neurčitě formulovaných požadavků na něj kladených. Pro libovolné $k \in \mathcal{N}$ tedy platí

(3.9) $\boxed{\varphi^{-1}(k) \subset \langle k; k/T(s(k)) \rangle}$

Poznamenejme, že ze vztahu (2.1) plyne:
pokud pro nějaké liché číslo $y$ platí $y \in \varphi^{-1}(k)$, pak také $2.y \in \varphi^{-1}(k)$;
pro každé $k \in \mathcal{H}(\varphi)$ tedy je $\max \varphi^{-1}(k)$ sudé číslo.

Tab.3

| | Prvočíselný rozklad čísla $k$ (mocnitele) | | | | | | | | Hodnoty funkcí z kap. 3 | | | Množina $\varphi^{-1}(k)$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 23 | 29 | $s(k)$ | $1/\mathrm{T}(s)$ | $k.1/\mathrm{T}(s)$ | | | | | | | | | | |
| ***1*** | | | | | | | | | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| ***2*** | 1 | | | | | | | | 2 | 3 | 6 | 3 | 4 | 6 | | | | | | | |
| ***4*** | 2 | | | | | | | | 3 | 3,75 | 15 | 5 | 8 | 10 | 12 | | | | | | |
| ***6*** | 1 | 1 | | | | | | | 2 | 3 | 18 | 7 | 9 | 14 | 18 | | | | | | |
| 8 | 3 | | | | | | | | 4 | 4,375 | 35 | 15 | 16 | 20 | 24 | 30 | | | | | |
| ***10*** | 1 | | 1 | | | | | | 2 | 3 | 30 | 11 | 22 | | | | | | | | |
| ***12*** | 2 | 1 | | | | | | | 3 | 3,75 | 45 | 13 | 21 | 26 | 28 | 36 | 42 | | | | |
| ***16*** | 4 | | | | | | | | 5 | 4,81 | 77 | 17 | 32 | 34 | 40 | 48 | 60 | | | | |
| ***18*** | 1 | 2 | | | | | | | 2 | 3 | 54 | 19 | 27 | 38 | 54 | | | | | | |
| 20 | 2 | | 1 | | | | | | 3 | 3,75 | 75 | 25 | 33 | 44 | 50 | 66 | | | | | |
| ***22*** | 1 | | | | 1 | | | | 2 | 3 | 66 | 23 | 46 | | | | | | | | |
| 24 | 3 | 1 | | | | | | | 4 | 4,375 | 105 | 35 | 39 | 45 | 52 | 56 | 70 | 72 | 78 | 84 | 90 |
| ***28*** | 2 | | | 1 | | | | | 3 | 3,75 | 105 | 29 | 58 | | | | | | | | |
| ***30*** | 1 | 1 | 1 | | | | | | 2 | 3 | 90 | 31 | 62 | | | | | | | | |
| 32 | 5 | | | | | | | | 6 | 5,21 | 167 | 51 | 64 | 68 | 80 | 96 | 102 | 120 | | | |
| ***36*** | 2 | 2 | | | | | | | 3 | 3,75 | 135 | 37 | 57 | 63 | 74 | 76 | 108 | 114 | 126 | | |
| ***40*** | 3 | | 1 | | | | | | 4 | 4,375 | 175 | 41 | 55 | 75 | 82 | 88 | 100 | 110 | 132 | 150 | |
| ***42*** | 1 | 1 | | 1 | | | | | 2 | 3 | 126 | 43 | 49 | 86 | 98 | | | | | | |
| 44 | 2 | | | | 1 | | | | 3 | 3,75 | 165 | 69 | 92 | 138 | | | | | | | |
| ***46*** | 1 | | | | | | 1 | | 2 | 3 | 138 | 47 | 94 | | | | | | | | |
| 48 | 4 | 1 | | | | | | | 5 | 4,81 | 231 | 65 | 104 | 105 | 112 | 130 | 140 | 210 | | | |
| ***52*** | 2 | | | | | 1 | | | 3 | 3,75 | 195 | 53 | 106 | | | | | | | | |
| 54 | 1 | 3 | | | | | | | 2 | 3 | 162 | 81 | 162 | | | | | | | | |
| 56 | 3 | | | 1 | | | | | 4 | 4,375 | 245 | 87 | 116 | 174 | | | | | | | |
| ***58*** | 1 | | | | | | | 1 | 2 | 3 | 174 | 59 | 118 | | | | | | | | |
| ***60*** | 2 | 1 | 1 | | | | | | 3 | 3,75 | 225 | 61 | 77 | 93 | 99 | 122 | 124 | 154 | 186 | 198 | |

Praha, srpen 2026
Poslední úprava 29.8.2026 (tab. 3: $\varphi^{-1}(40)$, $\varphi^{-1}(56)$)