

Lichá abundantní čísla

J. Nečas

V článku [1] jsme uvedli, že se považuje za velmi pravděpodobné, že neexistují lichá dokonalá čísla. Pojem dokonalého čísla motivuje zavést v závislosti na součtu dělitelů pojmy abundantní a deficientní čísla. Jim je věnován článek [2], kde je zmíněno, že mezi prvními 500 lichými čísly je jediné abundantní. V tomto článku se rozložení lichých abundantních čísel věnujeme podrobněji.

Abstract. In article [1] we have stated that it is considered very unlikely that there are odd perfect numbers. The concept of perfect number motivates the introduction of abundant and deficient numbers depending on the sum of divisors. This is the theme of the article [2], where it is mentioned that among the first 500 odd numbers is the only one abundant. In this article, the distribution of odd abundant numbers is discussed in more detail.

Klíčová slova. Počet dělitelů, součet dělitelů, abundabilita, abundantní číslo, dokonalé číslo, deficientní číslo, relace "dělí".

V tomto článku navážeme na článek [2], který se věnuje abundantním číslům. Budeme používat i termíny a označení, které tam byly zavedeny, zde zopakujeme jen to nejdůležitější. Dále zavedeme pojem **bezčtvercové přirozené číslo**, což je takové přirozené číslo, které není dělitelné druhou mocninou žádného přirozeného čísla. Číslo x je bezčtvercové, právě když je lze rozložit na součin prvočísel mající tvar

$$x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_M \quad (p_1 < p_2 < \dots < p_M). \quad (Z)$$

Položme dále pro $x, y \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}(x, \cdot) = \{z \in \mathbb{P}; z \geq x\},$$

$$\mathcal{P}(\cdot, y) = \{z \in \mathbb{P}; z \leq y\}$$

$$\mathcal{P}(x, y) = \{z \in \mathbb{P}; x \leq z \leq y\}.$$

Poznamenejme, že pro každé číslo x je první z množin nekonečná, kdežto další dvě konečné.

Přirozené číslo $x > 1$ nazveme p -číslem ($p \in \mathbb{P}$), právě když p je nejmenší prvočíslo, jímž je číslo x dělitelné.¹ Označme dále $\text{Pr}(x)$ množinu všech prvočísel, jimiž je číslo x dělitelné.

Jestliže x je p -číslo, pak $\text{Pr}(x) \subset \mathcal{P}(p, \cdot)$ ²

¹ 2-číslo je tedy totéž, co sudé číslo.

² Symbol $\subset$ označuje ostrou inkluzi.

Připomeňme, že **abundantním číslem** nazýváme každé takové nenulové přirozené číslo x , pro součet $S(x)$ jehož dělitelů platí $S(x) > 2x$. **Abundabilitou** $a(x)$ čísla x nazveme podíl $S(x)/x$, a $a(x) = S(x)/x$. Číslo x je abundantní, právě když $a(x) > 2$. Poznamenejme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a(n) \geq 1$, přičemž $a(n) = 1$, právě když $n = 1$.

Necht' p je prvočíslo. Pak

$$a(p) = 1 + p^{-1}$$

a pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí

$$a(p^n) \in (1 + p^{-1}; 1 + (p-1)^{-1}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(p^n) = 1 + (p-1)^{-1} \quad (\text{A})$$

Necht' p je libovolné prvočíslo a m a n přirozená čísla, $m < n$. Pak

$$a(p^m) < a(p^n)$$

Necht' p a q jsou dvě prvočísla, $p < q$. Pak

$$a(p) > a(q)$$

a dokonce pro každé přirozené číslo n platí

$$a(p^n) > a(q^n).^3$$

Žádné číslo tvaru p^n ($p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$) není abundantní. Pro všechna abundantní čísla x tedy platí $\text{Card Pr}(x) > 1$.⁴

Necht' $m > 1$ je libovolné liché přirozené číslo (tedy speciálně, může to být liché prvočíslo).

Poněvadž ze vztahu (A) plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} la(2^n) = 1$, existuje takové číslo $k \in \mathbb{N}$, že $2^k \cdot m$ je abundantní číslo. Existují tedy sudá abundantní čísla x , pro něž $\text{Card Pr}(x) = 2$

Necht' $x \in \mathbb{N}$, $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$. Pak z multiplikativnosti abundability plyne, že

$$a(x) = a(p_1^{k_1}) \cdot a(p_2^{k_2}) \cdot \dots \cdot a(p_n^{k_n}) \quad (\text{B})$$

V článku [2] jsme ukázali (mj. i prostřednictvím závěrečné tabulky), že mezi sudými čísly jsou abundantní čísla poměrně hustě rozložena. Jim se již dále věnovat nebudeme a zaměříme svou pozornost na lichá abundantní čísla. Uvedli jsme tam, že nejmenší liché abundantní číslo je $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$. Abundabilita jednotlivých činitelů je po řadě:

$$a(3^3) = (1 - 3^{-4}) / (1 - 3^{-1}) = (80/81) / (2/3) = 40/27 = 1,48148$$

$$a(5) = 1,2, a(7) = 1,14286,$$

tedy

$$a(945) = 1,48148 \cdot 1,2 \cdot 1,14286 = 2,032$$

³ Funkce $la(p^n)$ je tedy klesající v argumentu p , avšak rostoucí v argumentu n .

⁴ $\text{Card } M$ značí počet prvků množiny M (označení budeme používat jen pro konečné množiny).

Supremální abundabilitou prvočísla p nazveme číslo

$$sa(p) = \sup_n a(p^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(p^n) = 1 + (p - 1)^{-1}$$

Funkce $sa(p)$ je klesající funkcí argumentu p .

Tabulka 1 obsahuje logaritmické abundability la , supremální abundability sa a jejich rozdíly pro prvočísla z množiny $\mathcal{P}(2, 349)$

Tabulka 1

p	$a(p)$	$sa(p)$	$sa(p) - a(p)$		p	$a(p)$	$sa(p)$	$sa(p) - a(p)$
2	1,50000	2,00000	0,50000		151	1,00662	1,00667	0,00004
3	1,33333	1,50000	0,16667		157	1,00637	1,00641	0,00004
5	1,20000	1,25000	0,05000		163	1,00613	1,00617	0,00004
7	1,14286	1,16667	0,02381		167	1,00599	1,00602	0,00004
11	1,09091	1,10000	0,00909		173	1,00578	1,00581	0,00003
13	1,07692	1,08333	0,00641		179	1,00559	1,00562	0,00003
17	1,05882	1,06250	0,00368		181	1,00552	1,00556	0,00003
19	1,05263	1,05556	0,00292		191	1,00524	1,00526	0,00003
23	1,04348	1,04545	0,00198		193	1,00518	1,00521	0,00003
29	1,03448	1,03571	0,00123		197	1,00508	1,00510	0,00003
31	1,03226	1,03333	0,00108		199	1,00503	1,00505	0,00003
37	1,02703	1,02778	0,00075		211	1,00474	1,00476	0,00002
41	1,02439	1,02500	0,00061		223	1,00448	1,00450	0,00002
43	1,02326	1,02381	0,00055		227	1,00441	1,00442	0,00002
47	1,02128	1,02174	0,00046		229	1,00437	1,00439	0,00002
53	1,01887	1,01923	0,00036		233	1,00429	1,00431	0,00002
59	1,01695	1,01724	0,00029		239	1,00418	1,00420	0,00002
61	1,01639	1,01667	0,00027		241	1,00415	1,00417	0,00002
67	1,01493	1,01515	0,00023		251	1,00398	1,00400	0,00002
71	1,01408	1,01429	0,00020		257	1,00389	1,00391	0,00002
73	1,01370	1,01389	0,00019		263	1,00380	1,00382	0,00001
79	1,01266	1,01282	0,00016		269	1,00372	1,00373	0,00001
83	1,01205	1,01220	0,00015		271	1,00369	1,00370	0,00001
89	1,01124	1,01136	0,00013		277	1,00361	1,00362	0,00001
97	1,01031	1,01042	0,00011		281	1,00356	1,00357	0,00001
101	1,00990	1,01000	0,00010		283	1,00353	1,00355	0,00001
103	1,00971	1,00980	0,00010		293	1,00341	1,00342	0,00001
107	1,00935	1,00943	0,00009		307	1,00326	1,00327	0,00001
109	1,00917	1,00926	0,00008		311	1,00322	1,00323	0,00001
113	1,00885	1,00893	0,00008		313	1,00319	1,00321	0,00001
127	1,00787	1,00794	0,00006		317	1,00315	1,00316	0,00001
131	1,00763	1,00769	0,00006		331	1,00302	1,00303	0,00001
137	1,00730	1,00735	0,00005		337	1,00297	1,00298	0,00001
139	1,00719	1,00725	0,00005		347	1,00288	1,00289	0,00001
149	1,00671	1,00676	0,00005		349	1,00287	1,00287	0,00001

Z tabulky 1 je vidět, že rozdíl $sa(p) - a(p)$ s rostoucím p velmi rychle klesá.

Bezčtvercové číslo x s rozkladem (Z) je abundantní, právě když

$$\prod_1^n a(p_i) > 2$$

Nechť $q_1, \dots, q_M$ jsou navzájem různá prvočísla. K tomu, aby existovalo abundantní číslo, v jehož prvočíselném rozkladu se vyskytují právě tato čísla, je nutné, aby

$$\prod_1^M sa_\infty(q_i) > 2$$

Už jsme zmínili, že v prvočíselném rozkladu lichého abundantního čísla musejí být aspoň tři různá prvočísla. Pokud jedním z nich je 3, tak s třemi prvočíslly vystačíme. Čísla

$$945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7,$$

$$1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7,$$

$$2205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$$

jsou bázeckými abundantními čísly.

Nejmenší liché bezčtvercové abundantní číslo je

$$15015 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13;$$

je součinem pěti prvočísel.

Bázecká abundantní čísla s prvočiniteli 3, 5, 7 a 11 jsou

$$3465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$5775 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

$$8085 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$$

$$12705 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2$$

Obrátme svou pozornost k lichým p -abundantním číslům, kde $p > 3$

Nejmenší abundantní bezčtvercové 5-číslo je

$$5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 = 33\,426\,748\,355$$

Pokud chceme najít abundantní 5-číslo s nejmenším možným počtem prvočinitelů, budeme hledat nejkratší konečnou posloupnost po sobě následujících prvočísel $(5, 7, \dots, q_N)$, aby

$$sa(5) \cdot sa(7) \cdot \dots \cdot sa(q_N) \geq 2.$$

V tomto případě je $q_N = 23$. Nejmenší (ve smyslu počtu prvků) podmnožina množiny $\mathcal{P}(5, \dots)$, v níž leží všechny prvočinitele některého abundantního čísla, je tedy $\mathcal{P}(5, 23)$; bázeckými abundantními čísly jsou např.:

$$5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \approx 3,16364E+12$$

$$5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \approx 9,30483E+11$$

Nejmenším lichým abundantním číslem, které není dělitelné 3, je 5-číslo

$$5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 5\,391\,411\,025$$

Věnujme se dále abundantním 7-čísům. Nejmenší takové bezčtvercové číslo je

$$7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 73 \approx 1,35766E+27$$

Pokud budeme hledat abundantní 7-čísla s nejméně početnou množinou prvočinitelů, budeme postupovat podobně jako v předchozím případě a určíme $q_N = 61$; bázičným abundantním číslem je např.

$$4,68234E+26 = 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot \dots \cdot 61$$

Více prvočinitelů než toto, avšak méně než uvedené bezčtvercové číslo, mají např. bázičká abundantní čísla

$$7^2 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 71 \approx 1,39269E+26$$

$$7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 67 \approx 2,15769E+25$$

Zastavme se ještě u abundantních 11-čísel, 13-čísel a 15-čísel. Nejmenšími takovými bázičnými bezčtvercovými čísly jsou:

$$11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 149 \approx 7,10563E+54 \quad \text{v případě } \mathcal{P}(11, .)$$

$$13 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 233 \approx 1,92434E+90 \quad \text{v případě } \mathcal{P}(13, .)$$

$$17 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 367 \approx 4,0507E+143 \quad \text{v případě } \mathcal{P}(17, .)$$

Nejmenšími podmnožinami množin $\mathcal{P}(11, .)$, $\mathcal{P}(13, .)$, $\mathcal{P}(17, .)$, které obsahují všechny prvočinitele nějakého abundantního čísla, jsou po řadě $\mathcal{P}(11, 127)$, $\mathcal{P}(13, 199)$, $\mathcal{P}(17, 337)$

Z uvedených příkladů i z tabulky 1 je zřejmé, že hodnoty

$$M(p) = \min \{ \text{Card Pr}(x) \mid x \text{ je abundantní } p\text{-číslo}; p \in P \}$$

$$M'(p) = \min \{ \text{Card Pr}(x) \mid x \text{ je bezčtvercové abundantní } p\text{-číslo}; p \in P \}$$

s rostoucím p poměrně velmi rychle rostou, přičemž pro lichá prvočísla p je $M(p) < M'(p)$, přičemž rozdíl $M'(p) - M(p)$ je poměrně malý. Pro prvočísla do 23 jsou hodnoty uvedeny v tabulce 2. Rozložení lichých abundantních čísel v množině N je velmi řídké (mluvíme-li o abundantních p -číslech, jejich výskyt s rostoucím p velmi prudce klesá). Z tabulky 2 např. vyčteme, že v prvočíselném rozkladu každého abundantního 11-čísla je obsaženo aspoň 27 prvočísel, stačí 27 prvočísel 11, 13, 17, ..., 113, 127 (větší prvočísla mají menší abundabilitu), tedy prvočísla z množiny $\mathcal{P}(11, 127)$.

Tabulka 2

p	$M(p)$	$M'(p)$	$M'(p) - M(p)$
2	2	2	0
3	3	5	2
5	5	7	2
7	12	15	3
11	27	31	4
13	41	46	5
17	62	67	5
19	85	91	6
23	115	122	7

[1] Nečas, J.: Some Remarks on Trigonal and Perfect Numbers. MS 23, 2015

[2] Nečas, J.: Abundantní čísla. MS 25, 2017

RNDr. Jiří Nečas
Department of Mathematics
University of Economics
Ekonomická 957
148 00 Prague 4
e-mail: necas@vse.cz