Ke goniometrickým funkcím

Několik snad zajímavých doplňků k látce, která se v souvislosti s goniometrickými funkcemi probírá.

Snažím se vztahy a tvrzení ověřovat a kontrolovat, ale v devátém životním desetiletí to nemusí stačit k zabránění chybám. *Jirka Nečas*

Březen 2025

V dobách, kdy se goniometrické funkce spojovaly především s geometrií pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami *a, b* a přeponou *c*, se pro třídu podobných trojúhelníků, v nichž ostrý úhel proti odvěsně *a* označíme *α*, běžně uvažovalo 6 uspořádaných dvojic stran a k nim podíly jejich členů:

$\sin \alpha = a/c$

$\cos \alpha = b/c$

$\operatorname{tg} \alpha = a/b$

$\operatorname{cotg} \alpha = b/a$

$\sec \alpha = c/b$

$\operatorname{cosec} \alpha = c/a$

Poslední dvě uvedené funkce, po řadě **sekans** a **kosekans**, upadly poněkud v zapomnění. Obejdeme se bez nich. Obecně jsou definovány jako převrácené hodnoty kosinu, resp. sinu

$\sec x = 1/\cos x$;

$\operatorname{cosec} x = 1/\sin x.$

Podobně se ovšem můžeme obejít bez funkce kotangens, která je převrácenou hodnotou funkce tangens.

<u>Definiční obory funkcí sekans a kosekans</u>

$\mathcal{D}(\sec) = \mathcal{R} - \{(2k + 1)\pi/2;\ k \in \mathcal{Z}\}$

$\mathcal{D}(\operatorname{cosec}) = \mathcal{R} - \{k\pi;\ k \in \mathcal{Z}\}$

($\mathcal{Z}$ je množina všech celých čísel).

V izolovaných bodech, kde funkce sekans a kosekans nejsou definovány, neexistují oboustranné limity; jednostranné limity jsou z jedné strany $-\infty$, z druhé ∞ (viz dále grafy funkcí).

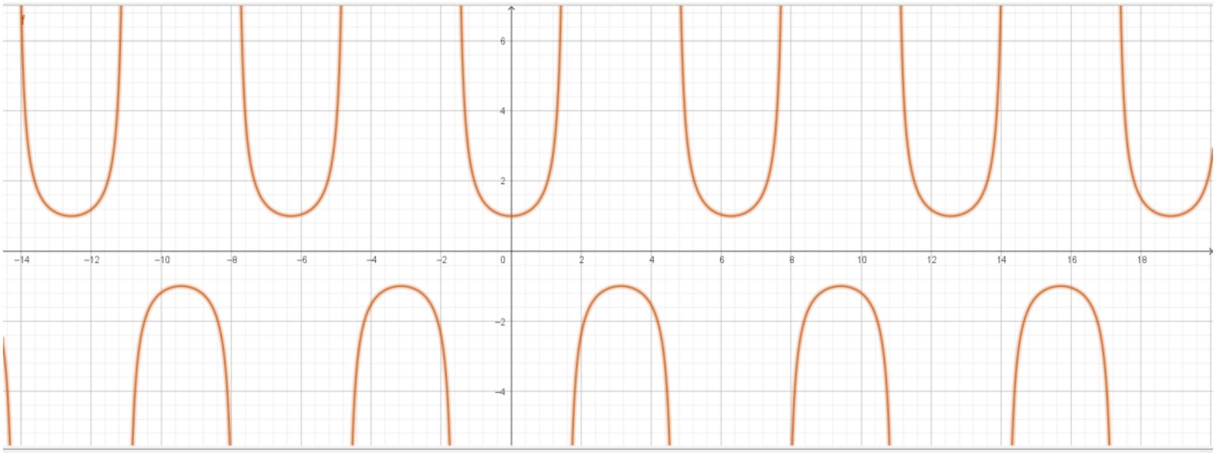
<u>Derivace funkcí sekans a kosekans</u>

$[\sec x]' = \operatorname{cosec} x \,/\, (\operatorname{cosec}^2 x - 1) = (\sec x)^2/\operatorname{cosec} x$

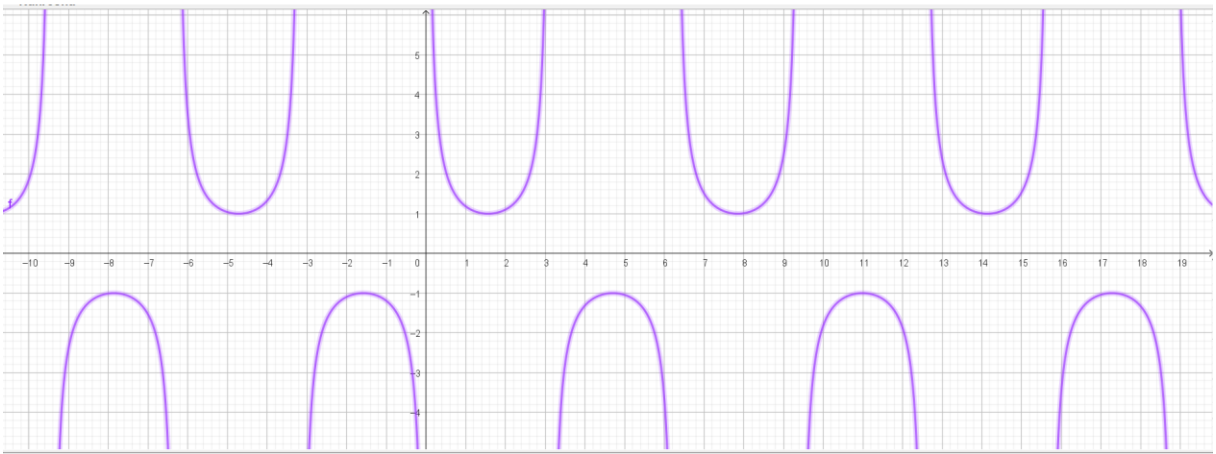
$[\text{cosec}\, x]' = -\sec x\,/(\sec^2 x - 1) \;= -\,(\text{cosec}\, x)^2/\sec x$

<u>Grafy funkcí sekans a kosekans</u>

Sekans



Kosekans



<u>Některé Maclaurinovy rozvoje</u>:

$\sin x\,/\,x = 1 - x^2/6 + x^4/120 - \ldots$

$\text{tg}\, x = x + x^3/3 + 2{*}x^5/15 \ldots$

$\text{tg}\, x\,/\,x = 1 + x^2/3 + 2{*}x^4/15 \ldots$

$\text{cotg}\, x = 1/x - x/3 - x^3/45 \ldots$

$\sec x = 1 + x^2/2 + 5{*}x^4/24 - 7/360\; x^6 + \ldots$

cosec $x = 1/x + x/6 + 7*x^3/360$ + ...

■■■

$[\sin x/x]'_{x=0} = 0$ (jde o sudé funkce)

$[\mathrm{tg}\, x/x]'_{x=0} = 0$

$[\sin x/x]''_{x=0} = -1/3$ (nejlépe použitím začátků MacLaurinova rozvoje)

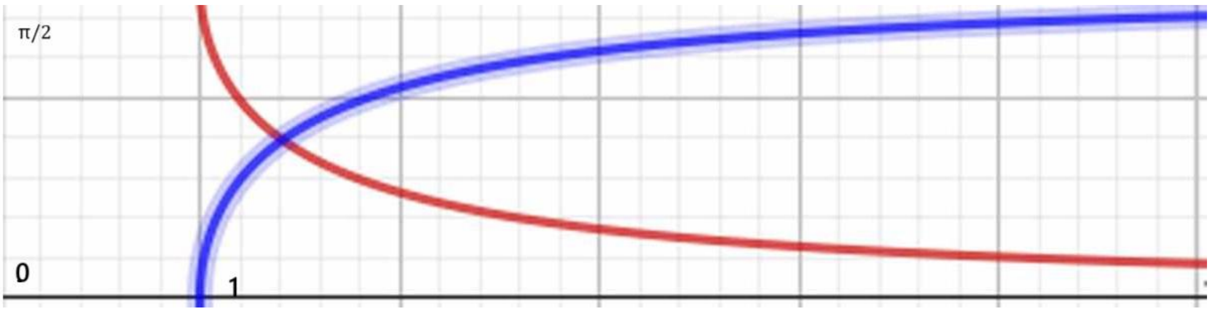
$[\mathrm{tg}\, x/x]''_{x=0} = 2/3$

■■■

Inverzní funkce arcsec, arccosec k sec, cosec definujme nejdříve tak, aby jejich hodnoty byly v intervalu ⟨0; π/2⟩, tedy odpovídaly ostrému úhlu.

sec *x* je rostoucí funkce, která zobrazuje interval ⟨0; π/2) na ⟨1; +∞), arcsec tedy zobrazuje interval ⟨1; +∞) na ⟨0; π/2); na obrázku je modře;

cosec *x* je klesající funkce, která zobrazuje interval (0; π/2⟩ na ⟨1; +∞), arccosec tedy zobrazuje interval ⟨1; +∞) na (0; π/2⟩ na obrázku je červeně.



Podobně jako při definici ostatních cyklometrických funkcí můžeme i v případě funkcí sec a cosec vybrat z definičního oboru podmnožiny, v nichž jsou tyto funkce prosté. Nejpřirozenější je z definičního oboru funkce sec vybrat

$\mathcal{H}$(arcsec) = ⟨0; π/2)∪(π/2;π⟩,

z definičního oboru funkce cosec pak vybrat

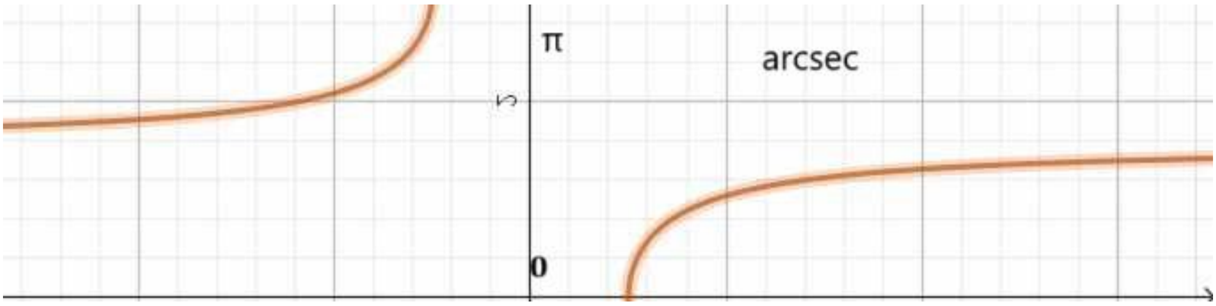
$\mathcal{H}$(arccosec) = ⟨-π/2; 0)∪(0; π/2⟩,

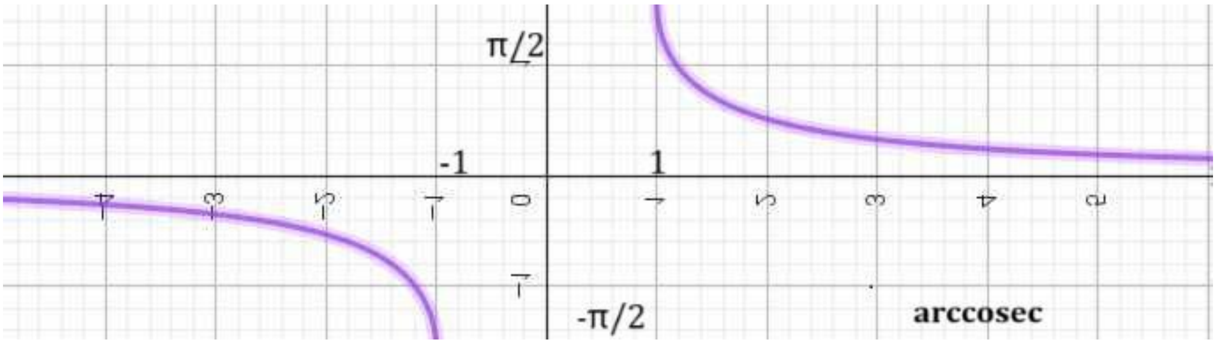
kde symbol $\mathcal{H}$ označuje obor hodnot.

Definiční obory mají funkce arcsec a arccosec stejné, a to

$\mathcal{D}$(arcsec) = $\mathcal{D}$(arccosec) = $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1, \infty) = \mathcal{R} - (-1; 1)$

Grafy funkcí arcsec a arccosec jsou na následujících obrázcích. Je z nich patrno, že arcsec je na každé souvislé části svého definičního oboru rostoucí funkcí, zatímco arccosec je na každé souvislé části svého definičního oboru klesající funkcí.





Derivace funkcí arkussekans a arkuskosekans

$(\operatorname{arcsec} x)' = 1/(|x|.\sqrt{(x^2 - 1)})$

$(\operatorname{arccosec} x)' = -1/(|x|.\sqrt{(x^2 - 1)})$

Plocha ohraničená přímkami x = 1, y = 0 a grafem funkce arccosec je nekonečná. Podobně je to s plochami omezenými přímkou x = ±1, přímkami $y = 0$, resp. π/2 a grafem funkce arccosec, resp. arcsec (viz obrázky s grafy funkcí – bez nich je poslední mluvnická věta zcela nesrozumitelná).

■ ■ ■

Primitivní funkce

$\int \sec x \, dx = 0{,}5 \ln ((\operatorname{cosec} x + 1)/(\operatorname{cosec} x - 1))$

$\int \operatorname{cosec} x \, dx = 0{,}5 \ln ((\sec x - 1)/(\sec x + 1)) = \ln \operatorname{tg} (x/2)$

$\int \operatorname{arcsec} x \, dx = x.\operatorname{arcsec} x - \operatorname{sign} x . \ln (x + \sqrt{(x^2 - 1)})$

$\int \operatorname{arccosec} x \, dx = x.\operatorname{arccosec} x + \operatorname{sign} x . \ln (x + \sqrt{(x^2 - 1)})$

■ ■ ■

Některé identity

$\sec(2x) = \sec^2 x / (2 - \sec^2 x)$

$\operatorname{cosec}(2x) = \sec x \,.\, \operatorname{cosec} x / 2$

$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x \,.\, \operatorname{cosec}^2 x$

$\sec^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x / \operatorname{cosec}^2 x$

$\operatorname{cosec}^2 x - 1 = \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x / \sec^2 x$

$\operatorname{tg} x = \sec x / \operatorname{cosec} x$

$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cosec} x / \sec x$