

Idempotentní matice řádu 2

$$X^2 = X$$

Omluva. Omlouvám se čtenářům, že nemám k dispozici závorky k vyznačení matic. Pracuji zde pouze s maticemi řádu 2; první řádek je součástí textu, druhý řádek je pod ním. Doufám, že tato má nouze nezhorší nějak výrazněji čitelnost textu.

a) je-li X **regulární matice**, existuje X^{-1} . Vynásobíme-li jí výše uvedený vztah, dostaneme (J je jednotková matice)

$$X = J.$$

Tedy existuje jediná regulární idempotentní matice, a jí je matice jednotková.

b) Nechť nyní X je **singulární matice**, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$; z její singulárnosti plyne

$xv = uy$ (je to nutná a postačující podmínka singulárnosti).

$$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 + uy & y(x+v) \\ u(x+v) & v^2 + uy \end{pmatrix}$$

matice X je tedy singulární a idempotentní, právě když

$$x = x^2 + uy \quad (11)$$

$$y = y(x+v) \quad (12)$$

$$u = u(x+v) \quad (13)$$

$$v = v^2 + uy \quad (14)$$

$$xv = uy \quad (15)$$

Z rovností (12) a (13) plyne:

$$x+v = 1 \vee (y=0 \wedge u=0) \quad (16)$$

Když z (15) dosadíme do (11) a (14), dostaneme

$$x = x^2 + xv \quad (17)$$

$$v = v^2 + xv, \quad (18)$$

tedy

$$x(x+v-1) = 0 \quad (19)$$

$$v(x+v-1) = 0 \quad (20)$$

Z rovností (19) a (20) plyne:

$$x+v = 1 \vee (x=0 \wedge v=0) \quad (21)$$

ba) Necht' tedy $x + v = 1$, tedy

$$v = 1 - x. \quad (22)$$

Dosaďme do (15):

$$x(1 - x) = uy.$$

baa) Nejdříve předpokládejme, že $xv \neq 0$; pak i $uy \neq 0$:

$$y = x(1 - x) / u \quad (23)$$

Do vztahů (11) až (14) dosaďme podle (22) a (23) za v a y :

$$x = x^2 + x(1 - x) \quad (11')$$

$$y = y(x + v) = x(1 - x)/u \quad (12')$$

$$u = u \quad (13')$$

$$1 - x = (1 - x)^2 + x(1 - x) \quad (14')$$

Identity (11'), (13'), (14') platí pro libovolné x, u .

V případě baa) tedy pro libovolné x , pro něž $x \neq 0 \wedge x \neq 1$, a libovolné u , když hodnoty y a v určíme podle vztahů (22) a (12'), je matice

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x(1-x)/u \\ u & 1-x \end{pmatrix}$$

idempotentní.

bab) Necht' $xv = 0$. Předpokládejme tedy, že $x = 0$, pak $v = 1$ (musí platit $x + v = 1$). Ze singularity matice X plyne, že také $yu = 0$. Uvažujme tedy $u = 0$. Dosaďme $x = u = 0$ do rovností (11) až (14). Získáme tak triviální vždy platné identity, nezávisle na hodnotě y .

Vzhledem k symetrii jak mezi prvky x a v hlavní diagonály, tak i mezi prvky u a y diagonály vedlejší je vidět, že *idempotentní je každá čtvercová matice řádu 2, která má v hlavní diagonále čísla 0 a 1, ve vedlejší aspoň jednu nulu, přičemž druhé číslo ve vedlejší diagonále může být libovolné.*

bb) Vraťme se k vztahu (21). Necht' nyní $x = v = 0$. Podle (15) musí být $u = 0 \vee y = 0$. Necht' $u = 0$. Podle (12) je však také $y = 0$. *Matice, která má v hlavní diagonále obě nuly, je idempotentní, právě když je nulová, tedy*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Shrnutí

Matice řádu 2 je idempotentní, právě když splňuje některou z následujících podmínek:

α) je jednotková (její hodnota je 2)¹,

β) je nulová (její hodnota je 0)²,

γ) součet prvků v její hlavní diagonále je roven 1 a součin prvků ve vedlejší diagonále je roven součinu prvků v hlavní diagonále³.

Podmínky γ) vyhovují např. tyto matice:

3	-2	■	0,6	0,48	■	1,5	1	■	1	0	■	1	44
3	-2		0,5	0,4		-0,75	-0,5		2	0		0	0

Ověření jejich idempotentnosti ponechávám čtenáři v naději, že někdy nějaký bude existovat (osobně jsem jejich druhé mocniny počítal a skutečně byly rovny původním maticím).

¹ Případ a)

² Případ bb)

³ Případ ba), pokud je, resp. není v hlavní diagonále číslo 0, jde o případ bab), resp. baa)