Hyperbolické a hyperbolometrické funkce

(rozšířený článek)

Poměrně snadné vyjádření hyperbolických a hyperbolometrických funkcí pomocí exponenciály , resp. logaritmu (v rámci analýzy reálné proměnné) způsobuje, že se těmto funkcím nevěnuje zvláštní pozornost, čímž je výuka základů matematické analýzy ochucena o různé zajímavé analogie a studentům je tak v této oblasti ztíženo vnímat krásu matematiky. Tento článek se některým opomíjeným vztahům věnuje, a ač zůstává v oboru reálné proměnné, svým způsobem připravuje půdu pro úvod do komplexní analýzy.

0. Sudá a lichá komponenta funkce

Nechť f je funkce, jejíž definiční obor je symetrický kolem nuly. Pak definujeme funkce f_S a f_L:

(0.1) $f_S(x)= (f(x) + f(-x))/2$

(0.2) $f_L(x)= (f(x) - f(-x))/2$

Zřejmě platí

(0.3) $f_S(x)= f_S(x) + f_L(x)$

Funkce f_S a f_L nazveme po řadě **sudou** a **lichou komponentou funkce** *f.* Sudá, resp. lichá komponenta funkce je vždy sudou, resp. lichou funkcí.

Připomeňme, že pokud k dané liché funkci existuje funkce inverzní, tak je lichá. K sudé funkci s nedegenerovaným definičním oborem $\mathcal{D}$ inverzní funkce neexistuje; abychom ji mohli definovat, omezujeme definiční obor na podmnožinu průniku $\mathcal{D} \cap \mathcal{R}^+$.

<u>Poznámka.</u> Symbolem $\mathcal{R}$, resp. $\mathcal{R}^+$, resp. $\mathcal{R}^-$ budeme značit množinu všech reálných, resp. reálných nezáporných čísel, resp. reálných nekladných. Průnik, sjednocení a rozdíl množin budeme značit po řadě $\cap$, $\cup$, -.

1. Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce jsou funkce **hyperbolický sinus** sh x**, hyperbolický kosinus** ch x**, hyperbolický tangens** th x, **hyperbolický kotangens**[1] cth x , **jyberbolický sekans** seh x **a hyperbolický kosekans** cseh x, které jsou definovány takto[2]:

,(1.1) sh $x = \exp_L x$ $(x \in \mathcal{R})$,

(1.2) ch $x = \exp_S x$ $(x \in \mathcal{R})$,

(1.3) th x = sh x / ch x $(x \in \mathcal{R})$,

(1.4) cth x = ch x / sh x $(x \in \mathcal{R} - \{0\})$.

(1.5) seh x = 1 / ch x $(x \in \mathcal{R})$,

(1.6) cseh x = 1 / sh x $(x \in \mathcal{R} - \{0\})$.

Funkce *hyperbolický sinus* je lichá; je na celém svém definičním oboru $\mathcal{R}$ prostá a rostoucí; jejím oborem hodnot je celá množina $\mathcal{R}$.

Funkce *hyperbolický kosinus* je sudá; na svém definičním oboru $\mathcal{R}$ tedy není prostá (je však prostá na $\mathcal{R}^+$, kde je rostoucí, i na $\mathcal{R}^-$, kde je klesající) a jejím oborem hodnot je interval $\langle 1, +\infty)$.

Funkce *hyperbolický tangens* je lichá; je na celém svém definičním oboru $\mathcal{R}$ prostá a rostoucí; jejím oborem hodnot je interval (-1, 1).

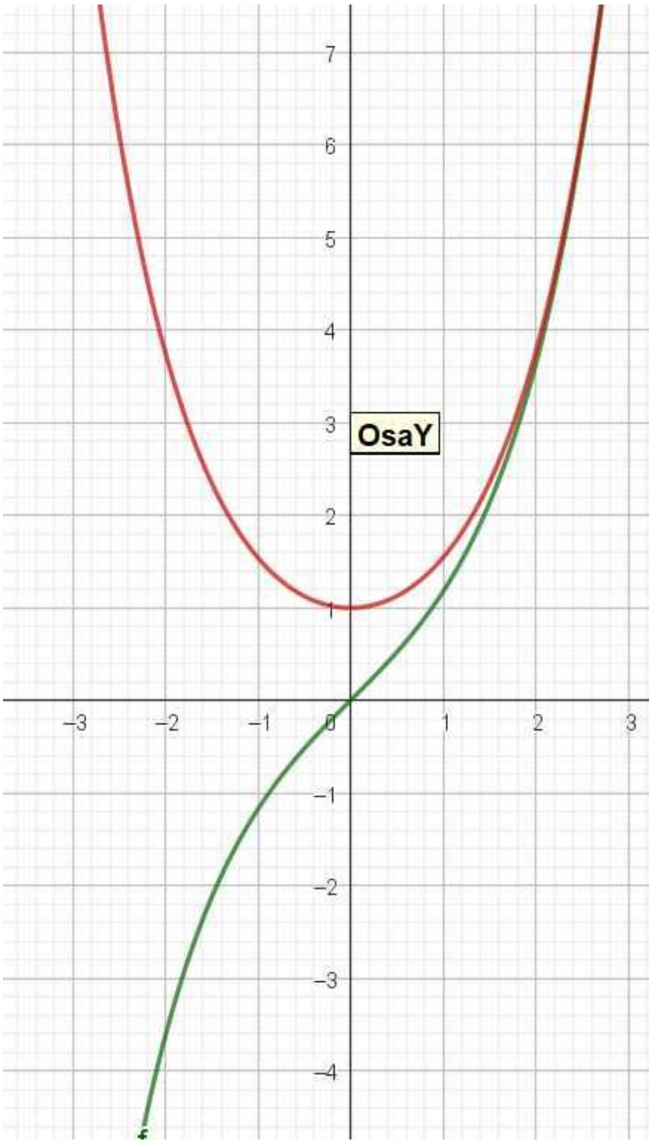
Funkce *hyperbolický kotangens* je lichá; je na celém svém definičním oboru $\mathcal{R} - \{0\}$ prostá a na každém jeho podintervalu klesající; jejím oborem hodnot je množina $\mathcal{R} - \langle -1, 1\rangle$.

Funkce *hyperbolický sekans* je sudá; na svém definičním oboru $\mathcal{R}$ tedy není prostá (je však prostá na $\mathcal{R}^+$, kde je klesající, i na $\mathcal{R}^-$, kde je rostoucí) a jejím oborem hodnot je interval $(0, 1\rangle$.

Funkce *hyperbolický kosekans* je lichá; na svém definičním oboru $\mathcal{R} - \{0\}$ je prostá a na každé souvislé části svého definičního oboru je rostoucí. Jejím oborem hodnot je množina $\mathcal{R} - \{0\}$.

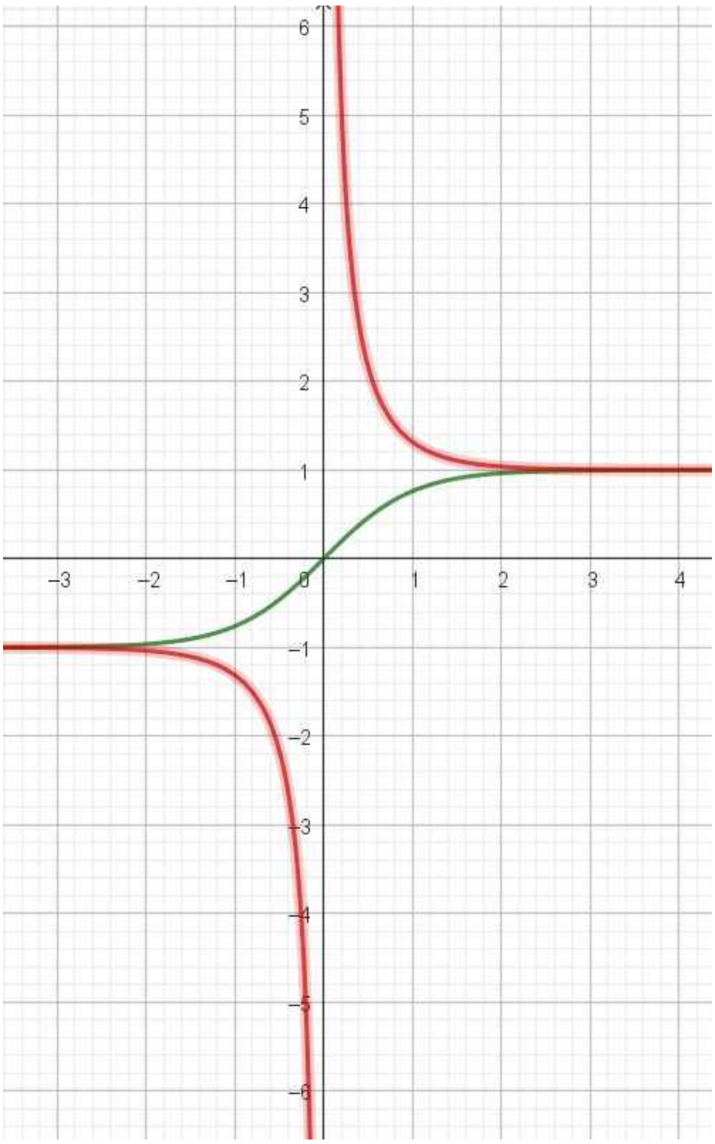
S hyperbolickými funkcemi přehledně seznamují následující komentované obrázky:

sh x = (exp (x) – exp (-x))/2
ch x = (exp (x) + exp (-x))/2



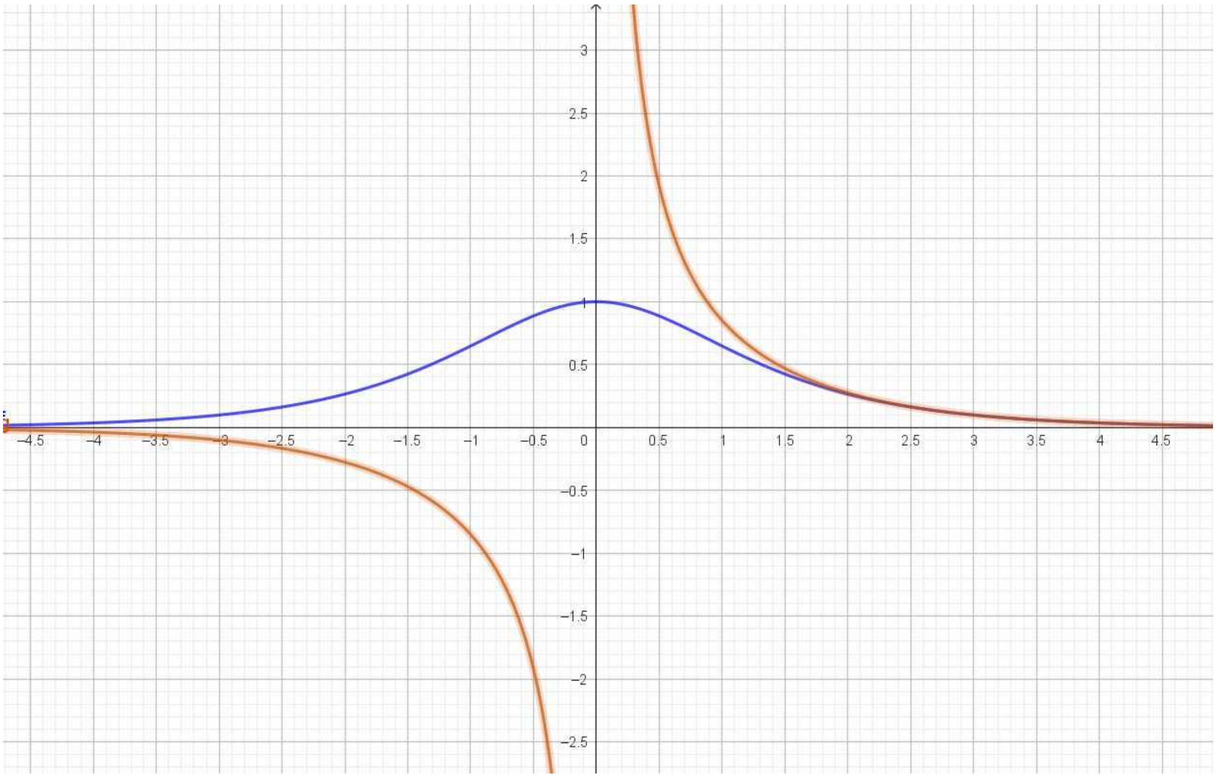
sh (zeleně), ch (červeně)
$\mathcal{D}$(sh) = $\mathcal{D}$(ch) = $\mathcal{H}(\mathrm{sh}) = \mathcal{R}$; $\mathcal{H}(\mathrm{ch}) = \langle 1; \infty)$

th x = (exp (x) – exp (-x))/(exp (x) + exp (-x))
cth x = (exp (x) + exp (-x))/(exp (x) – exp (-x))



th (zeleně), cth (červeně)
$\mathcal{D}$(th) = $\mathcal{R}$; $\mathcal{D}$(cth) = $\mathcal{R}$ - {0}; $\mathcal{H}$(th) = (-1; 1); $\mathcal{H}$(cth) = (-∞; -1) ∪ (1; ∞)

seh x = 2/(exp (x) + exp (-x))
cseh x = 2/(exp (x) – exp (-x))



seh (modře), cseh (červeně)
$\mathcal{D}$(seh) = $\mathcal{R}$; $\mathcal{D}$(cseh) = $\mathcal{R}$ - {0}; $\mathcal{H}(\text{seh}) = (0; 1\rangle$; $\mathcal{H}(\text{cseh}) = \mathcal{R}$ - {0}

2. Hyperbolometrické funkce

Hyperbolometrické funkce jsou funkce **argumentsinus hyperbolický** ash**,** **argumentkosinus hyperbolický** ach**, argumenttangens hyperbolický** ath, **argumentkotangens hyperbolický** acth, **argumentsekans hyperbolický** aseh a **argumentkosekans hyperbolický** acseh. Funkci ach definujme jako inverzní funkci k funkci ch omezené na množinu $\mathcal{R}^+$, funkce ash, ath, acth jako inverzní funkce po řadě k funcím sh, th, cth na celém jejich definičním oboru.
Definiční obory hyperbolometrických funkcí ash, ach, ath, acth splývají s obory hodnot příslušných hyperbolických funkcí, a tedy jsou po řadě $\mathcal{R}$, $\langle 1, +\infty)$, $(-1, 1)$, $(-\infty, -1) \cup (1 +\infty)$. Obory hodnot hyperbolometrických funkcí ash, ach, ath, acth jsou po řadě $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} - \{0\}$. Doplnit pro aseh, acsh

Hyperbolometrické funkce lze vyjádřit pomocí logaritmu:

(2.1) $\operatorname{ash} x = \ln (x + \sqrt{(x^2 + 1)})$

(2.2) $\operatorname{ach} x = \ln (x + \sqrt{(x^2 - 1)})$

(2.3) $\operatorname{ath} x = \ln \sqrt{((1 + x)/(1 - x))}$

(2.4) $\operatorname{acth} x = \ln \sqrt{((x + 1)/(x - 1))}$

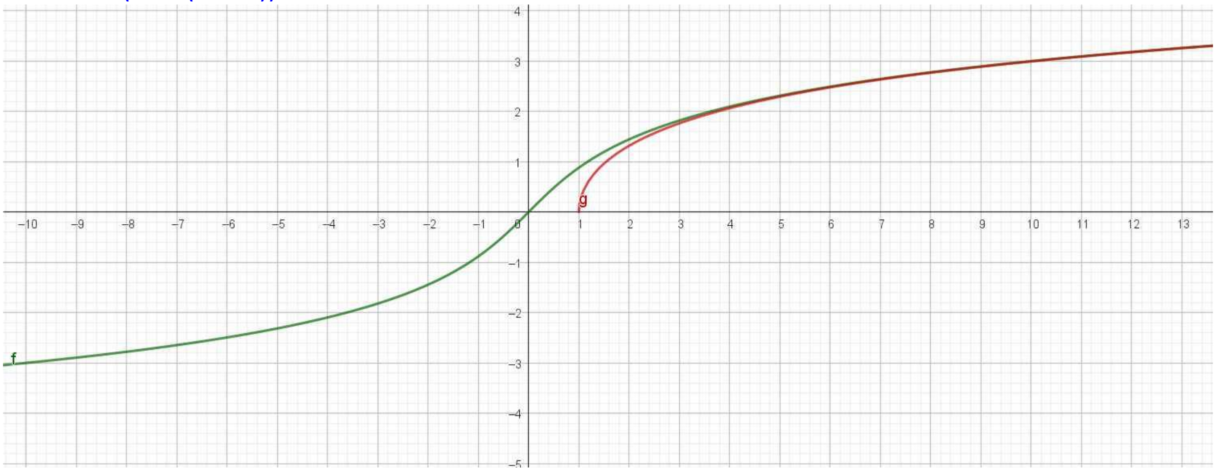
(2.5) $\operatorname{aseh} x = \ln ((1+\sqrt{(1 - x^2)})/x)$

(2.6) $\operatorname{acseh} x = \ln ((1+\operatorname{sign}(x).\sqrt{(1 + x^2)})/x)$

Připomeňme, že funkce ash, ath, acth a acseh jsou liché, i když to z jejich analytického vyjádření není na první pohled patrné. Definiční obory funkcí ach a seh nejsou symetrické kolem nuly.

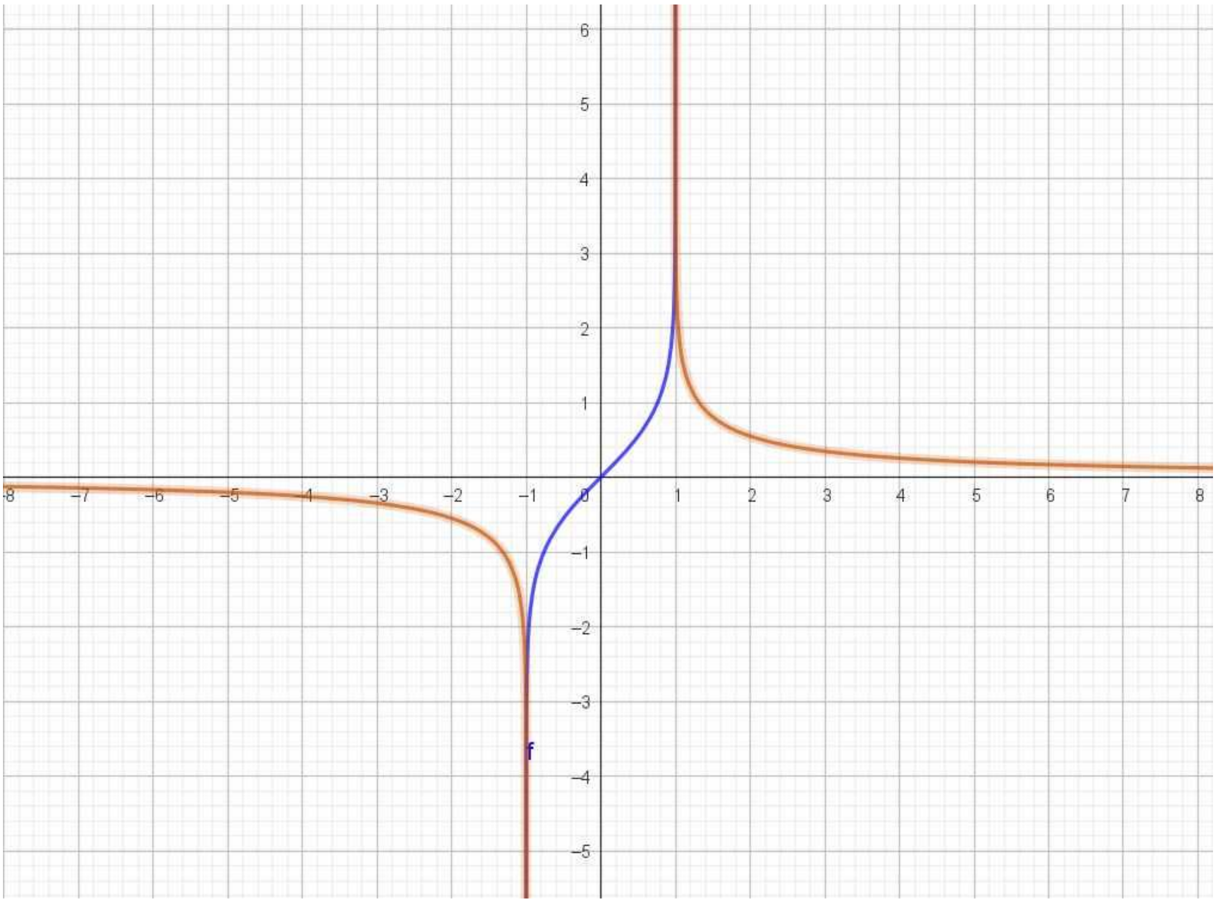
K bližšímu seznámení s hyperbolometrickými funkcemi souží následující komentované obrázky:

ash x = ln (x + √(x^2 + 1))
ach x = ln (x + √(x^2 − 1))



ash (zeleně), ach (červeně)
$\mathcal{D}$(ash) = $\mathcal{H}$(ash) = $\mathcal{R}$; $\mathcal{D}$(ach) = ⟨1; ∞); $\mathcal{H}$(ach) = ⟨0; ∞); konvergence k ±∞ je velmi pomalá (logaritmická)

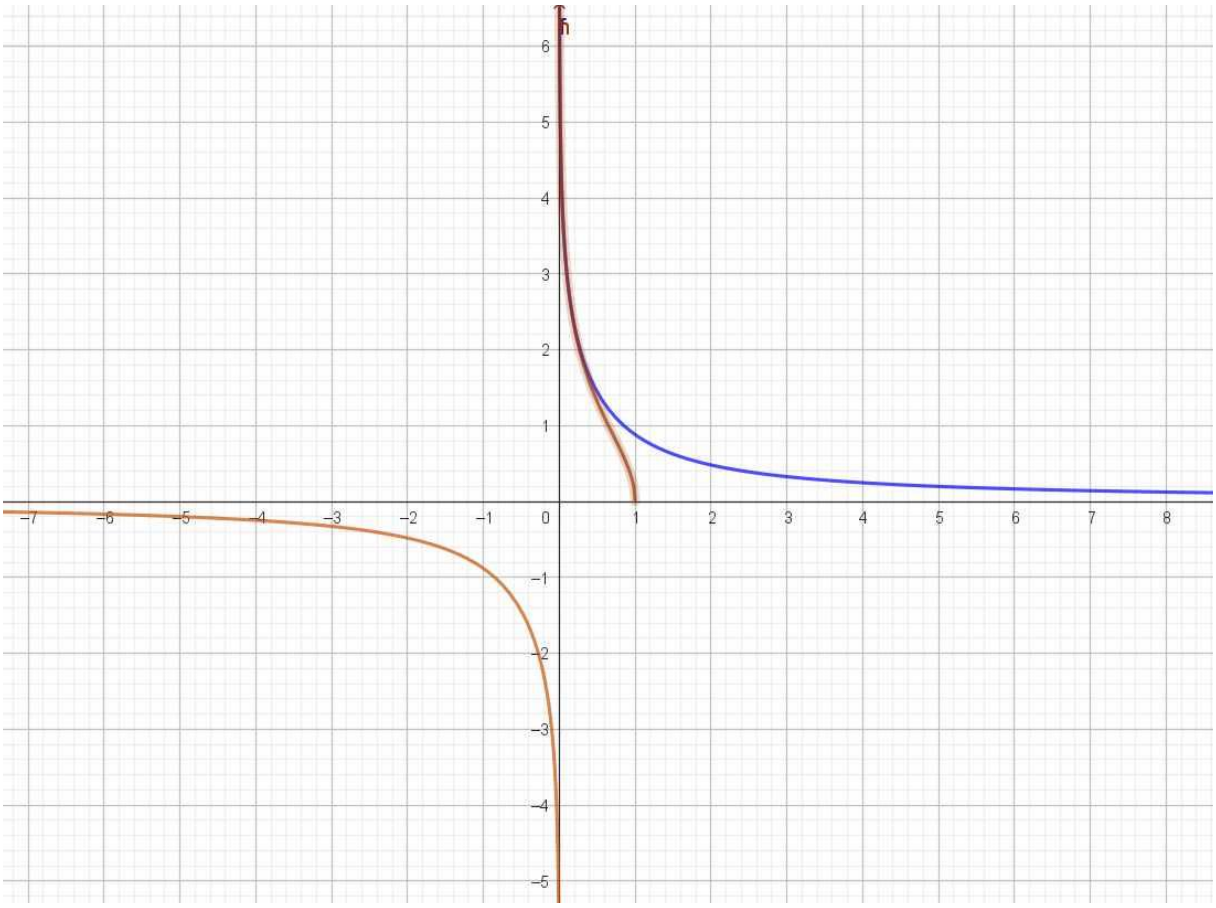
ath x = ln √((1 + x)/(1 – x))
acth x = ln √((1 + x)/(x – 1))



ath (modře), acth (červeně)

$\mathcal{D}$(ath) = (-1; 1); $\mathcal{D}$(acth) = (-∞; -1) ∪ (1; ∞); $\mathcal{H}$(ath) = $\mathcal{R}$; $\mathcal{H}$(acth) = $\mathcal{R}$ - {0};

aseh x = ln $((1+\sqrt{(1-x^2)})/x)$
acseh x = ln $((1+\mathrm{sign}(x).\sqrt{(1+x^2)})/x)$



aseh (hnědě; krátký definiční obor), acseh (modře pro kladná *x*, světle červeně pro záporná *x*)

$\mathcal{D}(\text{aseh}) = (0; 1\rangle$; $\mathcal{D}(\text{acseh}) = \mathcal{R}$ - $\{0\}$; $\mathcal{H}(\text{aseh}) = \langle 1; \infty)$; $\mathcal{H}(\text{acseh}) = \mathcal{R}$ - $\{0\}$

3. Součtové vzorce a další identity pro hyperbolické funkce

V tomto oddíle se omezíme na funkce sh a ch.

Součtové vzorce pro hyperbolické funkce jsou analogické součtovým vzorcům pro goniometrické funkce. Jejich odvození (popř. důkazy) jsou snadná z definice.

(3.0) $\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$

(3.1) $\mathrm{sh}\,(x + y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y$

(3.2) $\mathrm{ch}\,(x + y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y$

(3.3) $\mathrm{sh}\,(2x) = 2\, \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x$

(3.4) $\mathrm{ch}\,(2x) = \mathrm{ch}^2\, x + \mathrm{sh}^2\, x$

Ze vztahů (3.0) a (3.4) lze snadno odvodit vyjádření druhých mocnin funkcí sh a ch:

(3.5) $\mathrm{ch}^2\, x = (\mathrm{ch}\,(2x) + 1)/2$

(3.6) $\mathrm{sh}^2\, x = (\mathrm{ch}\,(2x) - 1)/2$

Dále platí:

(3.7) $\mathrm{sh}\, x\, .\, \mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\,(2x) / 2$

(3.8) $\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = \exp x$

(3.9) $\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = \exp(-x)$

(3.10) $\mathrm{sh}\, x\, .\, \mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\,(2x) / 2$

4. Derivace hyperbolických funkcí

Uvnitř definičních oborů funkcí platí

(4.1) $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$

(4.2) $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$

(4.3) $(\mathrm{th}\, x)' = 1 / \mathrm{ch}^2\, x$

(4.4) $(\mathrm{cth}\, x)' = -1 / \mathrm{sh}^2\, x$

(4.5) $(\mathrm{seh}\, x)' = \mathrm{seh}^2\, x / \mathrm{cseh}\, x$

(4.6) $(\mathrm{cseh}\, x)' = \mathrm{cseh}^2\, x / \mathrm{seh}\, x$

Pro porovnání uveďme derivace goniometrických funkcí:

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x$

$(\mathrm{cotg}\, x)' = -1/\sin^2 x$

$(\sec x)' = -\sec^2 x / \mathrm{cosec}\, x$

$(\mathrm{cosec}\, x)' = \mathrm{cosec}^2 x / \sec x$

5. Derivace hyperbolometrických funkcí

Vzorce pro derivace hyperbolometrických funkcí lze snadno odvodit ze vztahů (2.1) až (2.4), avšak stojí za to k nim dojít použitím věty o derivaci inverzní funkce (úvodní kurzy matematické analýzy poskytují celkem málo příležitostí pro její použití).

Uvnitř definičních oborů funkcí platí

(5.1) $(\mathrm{ash}\, x)' = 1/\sqrt{(x^2 + 1)}$

(5.2) $(\mathrm{ach}\, x)' = 1/\sqrt{(x^2 - 1)}$

(5.3) $(\mathrm{ath}\, x)' = 1/(1 - x^2)$

(5.4) $(\mathrm{acth}\, x)' = 1/(1 - x^2)$

(5.5) $(\mathrm{aseh}\, x)' = -1/(x.\sqrt{(1 - x^2)})$

(5.6) $(\mathrm{acseh}\, x)' = -\mathrm{sign}\, x/(x.\sqrt{(1 + x^2)})$

Na pravých stran ve vzorcích pro derivace funkcí ath a acth může je sice tentýž výraz, ovšem definiční obory funkcí ath a acth jsou disjunktní. Ve všech bodech definičních oborů platí

(5.7) $(\mathrm{ath}\, x)' > 0$

(5.8) $(\mathrm{acth}\, x)' < 0$

Poznamenejme, že obdobné nerovnosti platí pro cyklometrické funkce arctg a arcotg (jejich definičním oborem je ovšem celá množina $\mathcal{R}$).

Pro porovnání uveďme derivace cyklometrických funkcí:

(arcsin x)' = cos x

(arccos x)' = -sin x

(tg x)' = $1/\cos^2 x$

(arccotg x)' = $-1/\sin^2 x$

(arcsec x)' = $1/(|x|.\sqrt{(x^2-1)})$

(arccosec x)' = $-1/(|x|.\sqrt{(x^2-1)})$

6. Primitivní funkce k hyperbolickým funkcím

Ze vztahů (4.2) a (4.1) okamžitě plyne:

(6.1) $\int$ sh x dx = ch x + C

(6.2) $\int$ ch x dx = sh x + C

Ze vztahu (1.3), resp. (1.4) použitím substituce t = ch x, resp. t = sh x dostaneme

(6.3) $\int$ th x dx = ln ch x + C

(6.4) $\int$ cth x dx = ln |sh x| + C

K určení primitivních funkcí ke zbývajícím hyperbolickým funkcím je výhodné integrované funkce vyjádřit pomocí exponenciály a pak substituovat u = exp x

(6.5) $\int$ seh x = 2.arctg (exp x) + C

(6.6) $\int$ cseh x = ln |th ($x/2$)|

Na pravé straně ve výrazu (6.3) není použita absolutní hodnota, neboť v celém definičním oboru funkce ch platí ch(x) > 0

7. Primitivní funkce k cyklometrickým funkcím

Poněvadž cílem tohoto článku je ukázat na obdobné rysy goniometrických a hyperbolických, resp. cyklometrických a hyperbolometrických funkcí a znalost primitivních funkcí k cyklometrickým funkcím nelze u základního kursu matematické analýzy předpokládat, uveďme zde jejich přehled

(7.1) $\int \text{arctg}\, x\, \text{dx} = x.\text{arctg}\, x - \ln \sqrt{(1 + x^2)} + C$

(7.2) $\int \text{arccotg}\, x\, \text{dx} = x.\text{arccotg}\, x + \ln \sqrt{(1 + x^2)} + C$

(7.3) $\int \arcsin x\, \text{dx} = x \arcsin x + \sqrt{(1 - x^2)} + C$

(7.4) $\int \arccos x\, \text{dx} = x \arccos x - \sqrt{(1 - x^2)} + C$

(7.5) $\int \text{arcsec}\, x\, \text{d}x = x.\text{arcsec}\, x - \ln (x + \sqrt{(x^2 - 1)})$

(7.6) $\int \text{arccosec}\, x\, \text{d}x = x.\text{arccosec}\, x + \ln (x + \sqrt{(x^2 - 1)})$

8. Primitivní funkce k hyperbolometrickým funkcím

(8.1) $\int \text{ath}\, x\ \ \text{dx} = x.\text{ath}\, x + \ln \sqrt{(1 - x^2)} + C$

(8.2) $\int \text{acth}\, x\ \ \text{dx} = x.\text{ath}\, x - \ln \sqrt{(x^2 - 1)} + C$

(8.3) $\int \text{ash}\, x\ \ \text{dx} = x\, \text{ash}\, x - \sqrt{(1 + x^2)} + C$

(8.4) $\int \text{ach}\, x\, \text{dx} = x\, \text{ach}\, x - \sqrt{(x^2 - 1)} + C$

(8.5) $\int \text{aseh}\, x\ \ \text{dx} = x\, \text{aseh}\, x + \arcsin x + C$

(8.6) $\int \text{acseh}\, x\, \text{dx} = x\, \text{acseh}\, x + \text{sign}\, x\, .\, \text{ash}\, x + C$

Analogie skupiny vzorců (7.1) až (7.4) se skupinou (8.1) až (8.4) je patrná na první pohled. Vzorce (7.1) až (7.4) lze odvodit integrací per partes, přičemž jedním faktorem v integrované funkci je 1.

9. Výpočet primitivní funkce: hyperbolická substituce

Při výpočtu primitivní funkce k funkcím, v nichž se vyskytuje podvýraz $\sqrt{(a^2 - x^2)}$, se často uplatňuje goniometrická substituce $x = a \sin z$ (popř. s ní rovnocenná substituce $x = a \cos z$). Obdobně při výpočtu primitivní funkce k funkcím, v nichž se vyskytuje podvýraz $\sqrt{(a^2 + x^2)}$, resp. $\sqrt{(x^2 - a^2)}$, bývá užitečná substituce $x = a$ sh z, resp. $x = a$ ch z.

Uvedené podvýrazy lze jednoduchou lineární substitucí převést na obdobné výrazy, v nichž $a = 1$.

Než ukážeme použití těchto substitucí na dvou základních příkladech, připomeňme, že pomocí goniometrické substituce $x = a \sin z$ lze snadno vypočítat

(9.0) $\int \sqrt{(1 - x^2)}\, \mathrm{dx} = [x \sqrt{(1 - x^2)} + \arcsin x]/2$

<u>Příklad 1.</u>

Počítejme

(9.1) $\int \sqrt{(1 + x^2)}\, \mathrm{dx}$

Substituce: x = sh z. Pak $\sqrt{(1 + x^2)}$ = ch x. Protože (sh x)' = ch x, budeme za dx psát ch z dz. Integrál (9.1) jsme tak převedli na

(9.2) $\int \mathrm{ch}^2 z\, \mathrm{dz}$.

Podle (3.5) je $\mathrm{ch}^2 z = (\mathrm{ch}\,(2z) + 1)/2$, a tedy (s využitím (3.3))

(9.3) $\int \mathrm{ch}^2 z\, \mathrm{dz} = \mathrm{sh}\,(2z)/4 + z/2 = \mathrm{sh}\, z\, \mathrm{ch}\, z\, /\, 2 + z/2 + C$

Nyní je třeba udělat zpětnou substituci: sh $z = x$, ch $z = \sqrt{(1 + x^2)}$,
z = ash x. Vypočítali jsme tak, že

(9.4) $\int \sqrt{(1 + x^2)}\, \mathrm{dx} = [x \sqrt{(1 + x^2)} + \mathrm{ash}\, x]/2$.

Výsledek je analogický k výsledku integrálu v (9.0).
S použitím vztahu (2.1) odtud dojdeme k vyjádření používanému v příručkách nevyužívajících hyperbolometrické funkce:

$\int \sqrt{(1 + x^2)}\, \mathrm{dx} = [x \sqrt{(1 + x^2)} + \ln (x + \sqrt{(x^2 + 1)}]/2$.

Příklad 2.

Počítejme nyní integrál

(9.5) $\int \sqrt{(x^2 - 1)}\, dx$

Substituce: x = ch z. Pak $\sqrt{(x^2 - 1)}$ = sh x. Za dx budeme psát sh z dz. Integrál (9.5) jsme tak převedli na

(9.6) $\int \mathrm{sh}^2\, z\, dz$

Podle (3.6) je $\mathrm{sh}^2\, z = (\mathrm{ch}\,(2z) - 1)/2$, a tedy (s využitím (3.3))

(9.7) $\int \mathrm{sh}^2\, z\, dz = \mathrm{sh}\,(2z)/4 - z/2 = \mathrm{sh}\, z\, \mathrm{ch}\, z\, /\, 2 - z/2 + C$.

Nyní je třeba udělat zpětnou substituci: ch $z = x$, sh $z = \sqrt{(x^2 - 1)}$,
z = ach x. Vypočítali jsme tak, že

(9.8) $\int \sqrt{(x^2 - 1)} = [x \sqrt{(x^2 - 1)} - \mathrm{ach}\, x]/2 + C.$

I zde je patrná analogie s (9.0). S použitím vztahu (2.2) odtud dojdeme k vyjádření používanému v příručkách nevyužívajících hyperbolometrické funkce:

$\int \sqrt{(x^2 - 1)} = [x \sqrt{(x^2 - 1)} - \ln\,(x - \sqrt{(x^2 - 1)})]/2 + C.$

10. Závěr

Je škoda, že ve studijních plánech základů matematické analýzy hyperbolické a hyperbolometrické funkce zpravidla chybějí. Jistě, lze se bez nich obejít. Nicméně vnímání jejich obdoby s funkcemi goniometrickými a cyklometrickými přispívá k prožívání vnitřní krásy matematiky a tedy i k rozvíjení matematického myšlení a matematického vnímání světa, a je i dobrou průpravou pro vstup do světa funkcí komplexní proměnné. Mohou přispět k tomu, aby se další lidé připojovali k vyznání Josipa Plemelje "*Matematika je mi životní potřebou a uměleckým prožitkem*" [1]. A pokud jde o matematickou praxi, hyperbolické a hyperbolometrické substituce se vhodně uplatňují při výpočtu některých primitivních funkcí.

Literatura

[1] NEČAS, J. Životní potřeba a umělecký požitek. MS 21, 2013.

Květen 2013; poslední úprava 29/03/2025

Doplňky 2025 (modře) **–** zatím bez záruky

[1] Pokud jméno funkce končí na souhlásku, považujeme je v češtině za maskulinum nezávisle na rodu, které má příslušné slovo v latině
[2] Pro hyperbolické a hyperbolometrické funkce z praktických důvodů používáme stručnější značení než je běžné (pokud se s nimi vůbec pracuje)