# Hildegardina funkce a Hildegardin podíl

## Původní článek: Abundabilita a Eulerova funkce

**Abstract.** The article concludes a series of earlier articles published in the Mundus Symbolicus. It shows that two different criteria - the sum of divisors of any number and the number of numbers smaller than it a relatively prime to it are almost mutually dependent.

**Keywords.** Abundability, Euler's function, relative Euler's function, Hildegard's function, Hildegard's quotient.

V původním textu "Abundabilita a Eulerova funkce" byla v odd. 6 numerická chyba. Změny po jejím odstranění jsou vyznačeny tučně.

Text k původnímu doplněný v říjnu 2025 je modře.

**1. Úvod.** V článcích [2], [4], [6] jsme se věnovali abundantním číslům, tedy číslům, s nimiž je spojena hojnost – míníme hojnost dělitelů. Tu číselně vyjadřuje abundabilita. Články [3] a [5] jsou věnovány Eulerově funkci, která vyjadřuje počet čísel s daným číslem nesoudělných. Dělitel a číslo soudělné znamenají různé skutečnosti, nicméně intuitivně spolu nějak souvisejí. Této souvislosti se zde budeme věnovat.

V souladu se zmíněnými články i zde bude

$N_0$ = {0, 1, 2, 3, …} množina všech přirozených čísel (včetně nuly),

N = {1, 2, 3, …} množina všech kladných přirozených čísel,

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …} množina všech prvočísel.

Dále použijeme označení $N_{-1}$ = N – {1} = {2, 3, 4, ... }.

Symbolem | budeme označovat relaci "dělí" na $N_0$ (tedy $x|y$, právě když existuje takové $q \in N_0$, že $y = x.q$).

Přirozená čísla $x, y$ nazýváme *soudělnými*, právě když takové existuje $q \in N_{-1}$, pro něž platí $q|x \wedge q|y$. V obráceném případě mluvíme o *nesoudělných číslech.*

Funkce $F$ definovaná na N se nazývá *multiplikativní*, právě když pro každou dvojici $x$, $y$ nesoudělných čísel platí $F(xy) = F(x).F(y)$. Je-li $F$ multiplikativní funkce, pak $F(1) = 1$. Jestliže $F$ a $G$ jsou multiplikativní funkce, pak multiplikativními funkcemi jsou i jejich součin $F.G$ a podíl $F/G$.

Libovolné číslo $x \in$ N můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru[1]

[1] Abychom se vyhnuli indexům v exponentech, budeme v souladu s praxí v informatice mocninu $a^b$ označovat pomocí infixového zápisu binární operace $a$^$b$; i při tomto zápise platí, že operace ^ má vyšší prioritu než běžné aritmetické operace.

$$x = (p_1\hat{}n_1).(p_2\hat{}n_2). \ldots . (p_M\hat{}n_M), \qquad (1)$$

kde $p_1, p_2, \ldots, p_M$ jsou prvočísla splňující nerovnosti $p_1 < p_2 < \ldots < p_M$. Vyjádření (1) nazýváme *prvočíselným rozkladem čísla x*. Prvočíselný rozklad čísla 1 je prázdný součin, který je roven 1.

Je-li $F$ multiplikativní funkce, pak pro číslo $x$ vyjádřené ve tvaru (1) platí

$$F(x) = F(p_1\hat{}n_1). F(p_2\hat{}n_2). \ldots . F(p_M\hat{}n_M).$$

**2. Abundabilita.** Součet všech dělitelů přirozeného čísla $x$ označíme S($x$). S je *multiplikativní funkce*.

Pro každé $x \in$ N podíl abu ($x$) = S($x$)/$x$ nazýváme **abundabilitou čísla** *x.* Platí abu(1) = 1, pro každé $x \in N_{-1}$ je abu($x$) > 1. Abundabilita je také multiplikativní funkcí.

Číslo $x$ se nazývá **abundantní**, resp. **dokonalé**, resp. **deficientní**, právě když abu($x$) > 2, resp. abu($x$) = 2, resp. abu($x$) < 2. Uveďme několik triviálních tvrzení k ozřejmění uvedených pojmů. Pokud $x|y$, pak abu($x$) ≤ abu($y$). Tedy, je-li $x$ abundantní číslo a $x \mid y$, pak $y$ je také abundantní; je-li $y$ deficientní číslo a $x \mid y$, pak $x$ je také deficientní; je-li $u$ dokonalé číslo a $x \mid u, x \neq u$, pak je $x$ deficientní; je-li $u$ dokonalé číslo a $u \mid y, y \neq u$, pak je $x$ abundantní. Intuitivně tedy abundabilita vyjadřuje bohatost dělitelů.

Abundabilita prvočísla $p$ je

$$\text{abu}(p) = (p + 1)/ p = 1 + 1/p$$

Abundabilita $n$-té mocniny prvočísla $p$ je

$$\text{abu}(p\hat{}n) = (1 - 1/p^{n+1})/(1-1/p).$$

Je zřejmé, že abu($p$^$n$) je rostoucí funkcí exponentu $n$ a klesající funkcí argumentu *p.*

*Limitní abundabilitou* prvočísla $p$ rozumíme limitu

$$\text{abu}_\infty(p) = \lim_{n\to\infty} \text{abu}(p^n) = p/(p - 1) = 1 + 1/(p - 1). \qquad (2)$$

Pro libovolné prvočíslo $p$ a libovolné přirozené číslo $n$ platí

$$\text{abu}(p\hat{}n) < \text{abu}_\infty(p). \qquad (3)$$

V článku [6] bylo ukázáno, že obor hodnot funkce abu není ohraničený. Platí tedy

$$\inf(\text{abu}) = 1, \sup(\text{abu}) = +\infty.$$

**3. Eulerova funkce.** Pro každé přirozené číslo $x$ je definována **Eulerova funkce** $\varphi(x)$ jako počet přirozených čísel, která jsou menší nebo rovná číslu $x$ a jsou s číslem $x$ nesoudělná. Rovněž Eulerova funkce je multiplikativní. Platí $\varphi(1) = 1$, pro libovolné prvočíslo $p$ je $\varphi(p) = p - 1$, pro libovolné $p \in$ P a libovolné $n \in$ N pak platí

$$\varphi(p^n) = (p - 1)\, p^{n-1}$$

Definujme ještě **relativní Eulerovu funkci**

$$\Phi(x) = \varphi(x)/x ,$$

která je také multiplikativní. Hodnoty relativní Eulerovy funkce závisejí jen na prvočíslech vyskytujících se v rozkladu čísla $x$; nejsou tedy závislé na tom, v jaké mocnině se tam tato prvočísla vyskytují. Pro libovolnou ($n$-tou) mocninu prvočísla $p$ platí

$$\Phi(p^n) = (p - 1) / p = (1 - p^{-1}).$$

Pro obor hodnot $\mathcal{H}(\Phi)$ relativní Eulerovy funkce platí

$$\sup \mathcal{H}(\Phi) = 1 , \inf \mathcal{H}(\Phi) = 0 \qquad (4)$$

(viz [3]).

**4. Hildegardina funkce.** Čísla, která jsou z hlediska dělitelnosti "bohatší", mají větší hodnotu abundability, avšak menší hodnotu relativní Eulerovy funkce. Abychom je mohli pohodlněji porovnávat, definujme **Hildegardinu[2] funkci** jako převrácenou hodnotu relativní Eulerovy funkce:

$$\mathrm{Hi}(x) = 1/ \Phi(x).$$

Hildegardina funkce je zřejmě rovněž multiplikativní; pro libovolnou ($n$-tou) mocninu prvočísla $p$ tedy platí

$$\mathrm{Hi}(p^n) = p/(p - 1) = 1/(1 - p^{-1}) \qquad (5)$$

Porovnáme-li vztahy (2) a (5), vidíme, že pro libovolné $p \in \mathrm{P}$ a $n \in \mathrm{N}$ platí

$$\mathrm{Hi}(p^n) = \mathrm{Hi}(p) = \mathrm{abu}_\infty(p),$$

a tedy podle (3) pro libovolný exponent $n \in \mathrm{N}$ je

$$\mathrm{abu}(p\text{^}n) < \mathrm{Hi}(p).$$

Protože multiplikativní funkce abu i Hi nabývají jen kladných hodnot, pro libovolné číslo $x \in \mathrm{N}_{-1}$ platí

$$\mathrm{abu}(x) < \mathrm{Hi}(x). \qquad (6)$$

Ze rovností (4) plyne

$$\inf (\mathrm{Hi}) = 1, \sup (\mathrm{Hi}) = +\infty.$$

[2] Sv. Hildegarda z Bingen (1098-1179), všestranně velmi vzdělaná žena, žila v době, kdy se o funkcích neuvažovalo; volbou názvu funkce tuto pozoruhodnou ženu připomínám, vzhledem k časovému odstupu se snad nedostávám do problémů s autorským zákonem a – aspoň doufám – nehrozí nějaká nepříjemná duplicita v názvu.

**5. Hildegardin podíl.** Čísla, která jsou z hlediska dělitelnosti bohatší, mají větší hodnoty funkcí abu i Hi. Určitý vztah mezi nimi vyjadřuje nerovnost (6). Pro jednoduchost vyjádření definujme ještě pro každé $x \in \mathrm{N}$ **Hildegardin podíl**

$$\mathrm{Hq}(x) = \mathrm{Hi}(x) / \mathrm{abu}(x).$$

Hq je rovněž multiplikativní funkcí, tedy Hq(1) = 1. pro libovolné $x \in \mathrm{N}_{-1}$ pak z (6) plyne

$$\mathrm{Hq}(x) > 1.$$

Pro libovolné prvočíslo $p \in \mathrm{P}$ a libovolné $n \in \mathrm{N}$ platí

$$\mathrm{Hq}(p) = 1/(1 - 1/p^2),$$

$$\mathrm{Hq}(p^n) \leq 1/(1 - 1/p^2), \tag{7}$$

$$\sup_n \mathrm{Hq}(p^n) = \max_n \mathrm{Hq}(p^n) = \mathrm{Hq}(p) = 1/(1 - 1/p^2),$$

protože

$$\mathrm{Hq}(p^n) = \mathrm{Hi}(p^n) / \mathrm{abu}(p^n) \leq \mathrm{Hi}(p) / \mathrm{abu}(p) = \mathrm{Hq}(p) =$$

$$= (1+1/(p-1))/(1+1/p) \quad = 1/(1 - 1/p^2),$$

přičemž $\mathrm{abu}(p^n)$ je rostoucí funkcí v proměnné $n$.

Ukážeme, že hodnoty podílu Hq nejsou neomezené, nýbrž dokonce jsou omezeny konstantou menší než 2, což znamená, že neomezené funkce Hi a abu se chovají svým způsobem podobně. Budeme hledat "co nejmenší"[3] horní závoru množiny hodnot $\mathcal{H}$(Hq) funkce Hq. Dříve však ještě uveďme dvě triviální tvrzení, která nám přiblíží chování Hildegardina podílu Hq; druhé z nich bude i úvodem k hledání zmíněné horní závory.

a) Funkce dvou proměnných $\mathrm{Hq}(p^n)$ definovaná na P **x** N

$$\mathrm{Hq}(p^n) = p^{n+1}/(p^{n+1} - 1) = 1/(1 - 1/p^{n+1})$$

je klesající funkcí jak v proměnné $p \in \mathrm{P}$, tak v proměnné $n \in \mathrm{N}$.

Protože Hq je multiplikativní funkce, z právě uvedeného tvrzení plyne tento důsledek: Nechť $k = (p_1 \wedge a_1).(p_2 \wedge a_2) \ldots (p_r \wedge a_r)$, kde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ jsou navzájem různá prvočísla. Pak

$$\mathrm{Hq}(k) \leq \mathrm{Hq}(p_1.p_2. \ldots .p_r)$$

[3] Co nejbližší supremu, které neumíme přesně určit.

b) Odtud pak plyne:

Nechť $m$ = Prfact ($k$) pro některé $k \in$ N. Nechť $n < m$. Pak

$$\mathrm{Hq}(n) \leq \mathrm{Hq}(m - 1)$$

Uveďme, co výše uvedené tvrzení znamená pro tři zvolené hodnoty $m$, a to 30 = Prfact(3), 210 = Prfact (4) a 30030 = Prfact(6):

Pro $n < 30$ je Hq($n$) ≤ Hq(Prfact(2)) = Hq(6) = 1,5000

Pro $n < 210$ je Hq($n$) ≤ Hq(Prfact(3)) = Hq(30) = 1,5625

Pro $n < 30\,030$ je Hq($n$) ≤ Hq(Prfact(5)) = Hq(2310) ≈ 1,6083

Hodnoty Hi($x$), abu($x$) a Hq($x$) pro $x \leq 60$ jsou v tabulce na konci článku.

**6. Horní omezení Hildegardina podílu.** Nechť $x \in$ N s prvočíselným rozkladem (1). Podle (7) je

$$\mathrm{Hq}(x) \leq \Pi_{j=1}^{M} [1/(1 - 1/p_j^2)].$$

Protože pro libovolné prvočíslo $p$ je $1/(1 - 1/p^2) > 1$, platí omezení[4]

$$\mathrm{Hq}(x) \leq \Pi_{p\in \mathrm{P}} [1/(1 - 1/p^2)]. \qquad (8)$$

Protože pro každé prvočíslo $p$ je $\mathrm{Hq}(p) = 1/(1 - 1/p^2)$, pro součin prvočísel v první mocnině se hodnota funkce Hq může hodnotě $\Pi_{p\in \mathrm{P}} [1/(1 - 1/p^2)]$ libovolně přiblížit[5], a tedy platí

$$\sup \mathrm{Hq}(x) = \Pi_{p\in \mathrm{P}} [1/(1 - 1/p^2)]. \qquad (9)$$

V dalším textu půjde tedy o hledání horního odhadu pro tento nekonečný součin.

Uveďme nejdříve dvě lemmata.

<u>Lemma 1</u>: Nechť $0 < \epsilon \leq \delta < 1/2$. Nechť $\gamma = 1/(1 - \delta)$ Pak

$$1/(1 - \epsilon) < 1 + \gamma\,\epsilon$$

<u>Důkaz</u>: Využijeme jednak toho, že $1/(1 - \epsilon)$ je součet nekonečné geometrické řady s prvním členem 1 a kvocientem $\epsilon$, jednak skutečnosti, že funkce $1/(1 - \xi)$ je rostoucí v argumentu $\xi$. Postupně upravujme a omezujme:

$$1/(1 - \epsilon) = 1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \ldots = 1 + \epsilon(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \ldots) =$$

$$=1 + \epsilon.(1/(1 - \epsilon)) \leq 1 + \epsilon.(1/(1 - \delta)) = 1 + \gamma\,\epsilon. \quad \blacksquare$$

---

[4] Základní informaci o nekonečných součinech lze nalézt v knize [1].

[5] Podrobněji: V souladu s článkem [6] $i$-té prvočíslo označme $q_i$, dále označme $b_n = \Pi_1^n\, q_i$. Pak $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Hq}(b_n) = \Pi_{p\in \mathrm{P}} [1/(1 - 1/p^2)] = \sup \mathrm{Hq}(x)$

Lemma 2: Nechť $\{ \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \}$ je klesající posloupnost kladných čísel, $\epsilon_1 \leq \delta < 1/2$, $\gamma = 1/(1 - \delta)$. Pak

$$\Pi_{i=1}^{\infty} (1/(1 - \epsilon_i)) \leq \Pi_{i=1}^{\infty} (1 + \gamma\, \epsilon_i).$$

Důkaz. Aplikujeme lemma 1 na všechny činitele nekonečného součinu.

Vraťme se k nekonečnému součinu v nerovnosti (9). Aplikujeme na něj lemma 2, přičemž položíme $\epsilon_i = 1/p_i^2$, kde je $i$-té prvočíslo, a $\delta = 1/4$ (tedy $\gamma = 4/3$); využijeme platnost nerovnosti

$$\ln (1 + x) \leq x$$

pro všechna nezáporná reálná čísla $x$ a známou identitu

$$\Sigma_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \pi^2/6: \qquad (10)$$

$$\Pi_{p\in P} [1/(1 - 1/p^2)] = \exp(\ln \Pi_{p\in P} [1/(1 - 1/p^2)]) =$$

$$= \exp( \Sigma_{p\in P} \ln[1/(1 - 1/p^2)]) \leq \exp( \Sigma_{p\in P} \ln[1 +(4/3)/p^2]) \leq$$

$$\leq \exp(\Sigma_{p\in P} (4/3)/p^2) \leq \exp((4/3)\Sigma_{p\in P}\, p^{-2}) \leq \exp((4/3)\Sigma_{j=2}^{\infty} j^{-2}) =$$

$$= \exp((4/3)(\pi^2/6 - 1 ) \approx \exp 0{,}86 \approx 2{,}363$$

Číslo 2,363 je tedy horní závorou množiny $\mathcal{H}$(Hq) hodnot Hildegardina podílu[6].

Ukážeme ještě, jak lze tento odhad ještě zlepšit. Pravou stranu rovnosti (9) vyjádříme jako součin dvou součinů:

$$\Pi_{p\in P} [1/(1 - 1/p^2)] = \Pi_{p\in P\wedge p\leq\beta} [1/(1 - 1/p^2)] \,.\, \Pi_{p\in P\wedge p>\beta} [1/(1 - 1/p^2)], \qquad (11)$$

kde $\beta$ je vhodně zvolené přirozené číslo. Zvolme $\beta = 29$. Ze vztahů (9) a (11) dostaneme

$$\sup (Hq) = \Pi_{p\in P} [1/(1 - 1/p^2)] =$$

$$= \Pi_{p\in P\wedge p\leq 29} [1/(1 - 1/p^2)] \,.\, \Pi_{p\in P\wedge p\geq 31} [1/(1 - 1/p^2)].$$

První činitel je konečným součinem 10 činitelů a snadno jej vypočítáme:

$$\Pi_{p\in P\wedge p\leq 29} [1/(1 - 1/p^2)] \approx 1{,}6331.$$

Protože druhý činitel je větší než 1, platí

$$\sup (Hq) > \Pi_{p\in P\wedge p\leq 29} [1/(1 - 1/p^2)],$$

tedy

[6] Používáme zápis exp $y$ místo obvyklejšího $e^y$.

$\sup(Hq) > 1{,}633$

Druhý činitel je nekonečným součinem a jeho hodnota se na první pohled liší jen málo od 1; budeme jej majorizovat dříve uvedeným způsobem. Použijeme opět lemma 2, přičemž nyní bude $\epsilon_1 = 1/31^2 = 1/961 = 0{,}00104$; položme $\delta = 0{,}00105$, a tedy $\gamma \approx 1{,}00106$ (po zaokrouhlení nahoru). Dostáváme tak

$$\Pi_{p\in P \wedge p\geq 31} [1/(1 - 1/p^2)] < \Pi_{p\in P \wedge p\geq 31} (1 + \gamma / p^2) =$$

$$= \exp [\ln \Pi_{p\in P \wedge p\geq 31} (1 + \gamma / p^2)] \qquad = \exp [\Sigma_{p\in P \wedge p\geq 31} \ln (1 + \gamma / p^2)] \leq$$

$$\leq \exp [\gamma \Sigma_{p\in P \wedge p\geq 31} p^{-2}] < \exp [\gamma \Sigma_{j=31}^{\infty} j^{-2}] \approx$$

$$\approx \exp (1{,}00106.0{,}0328) \approx \exp 0{,}0329 \approx \mathbf{1{,}0334472}; \qquad (12)$$

přičemž jsme preferovali zaokrouhlení nahoru. Ve výpočtu (12) jsme řadu se čtverci prvočísel ve jmenovateli majorizovali řadou, která má ve jmenovateli čtverce přirozených čísel; v obou případech počínajíc 31.
K vyjádření součtu $\Sigma_{j=31}^{\infty} j^{-2}$ využíváme identitu (10):

$$\Sigma_{j=31}^{\infty} j^{-2} = \pi^2/6 - \Sigma_{j=1}^{30} j^{-2} \approx 1{,}64493 - 1{,}61215 \approx 0{,}0328,$$

a tedy

$$\gamma \Sigma_{j=31}^{\infty} j^{-2} \approx 1{,}00106 \,.\, 0{,}0328 < 0{,}0329.$$

Pro sup(Hq) tak dostáváme horní odhad

$$\sup(Hq) \approx 1{,}6331 \,.\, \mathbf{1{,}03345} \approx \mathbf{1{,}688},$$

a tak

$$\sup(Hq) \in (1{,}633, \mathbf{1{,}688)} \,.$$

Neohraničené funkce abundabilita, související s počtem dělitelů, a Hildegardina funkce, vyjadřující inverzním způsobem počet čísel s daným nesoudělných, se tedy liší poměrně nevýrazně; jejich podíl leží v intervalu $\langle 1; 1{,}6\mathbf{9})$.

## References


[1] Jarník, V.: Diferenciální počet II. Praha, Academia 1984

[2] Nečas, J.: Abundantní čísla. MS 25, 2017

[3] Nečas, J.: Relativní Eulerova funkce. MS 25, 2017

[4] Nečas, J.: Lichá abundantní čísla. MS 26, 2018

[5] Nečas, J: Hodnoty Eulerovy funkce. MS 28, 2020

[6] Nečas, J.: Neomezená abundabilita. MS 29, 2021

Tabulka hodnot Hildegardiny funkce $\mathrm{Hi}(x)$, abundability $\mathrm{abu}(x)$ a Hildegardina podílu $\mathrm{Hq}(x)$ pro hodnoty $x \leq 60$

| x | Hi(x) | abu(x) | Hq(x) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2,0000 | 1,5000 | 1,3333 |
| 3 | 1,5000 | 1,3333 | 1,1250 |
| 4 | 2,0000 | 1,7500 | 1,1429 |
| 5 | 1,2500 | 1,2000 | 1,0417 |
| 6 | 3,0000 | 2,0000 | 1,5000 |
| 7 | 1,1667 | 1,1429 | 1,0208 |
| 8 | 2,0000 | 1,8750 | 1,0667 |
| 9 | 1,5000 | 1,4444 | 1,0385 |
| 10 | 2,5000 | 1,8000 | 1,3889 |
| 11 | 1,1000 | 1,0909 | 1,0083 |
| 12 | 3,0000 | 2,3333 | 1,2857 |
| 13 | 1,0833 | 1,0769 | 1,0060 |
| 14 | 2,3333 | 1,7143 | 1,3611 |
| 15 | 1,8750 | 1,6000 | 1,1719 |
| 16 | 2,0000 | 1,9375 | 1,0323 |
| 17 | 1,0625 | 1,0588 | 1,0035 |
| 18 | 3,0000 | 2,1667 | 1,3846 |
| 19 | 1,0556 | 1,0526 | 1,0028 |
| 20 | 2,5000 | 2,1000 | 1,1905 |
| 21 | 1,7500 | 1,5238 | 1,1484 |
| 22 | 2,2000 | 1,6364 | 1,3444 |
| 23 | 1,0455 | 1,0435 | 1,0019 |
| 24 | 3,0000 | 2,5000 | 1,2000 |
| 25 | 1,2500 | 1,2400 | 1,0081 |
| 26 | 2,1667 | 1,6154 | 1,3413 |
| 27 | 1,5000 | 1,4815 | 1,0125 |
| 28 | 2,3333 | 2,0000 | 1,1667 |
| 29 | 1,0357 | 1,0345 | 1,0012 |
| 30 | 3,7500 | 2,4000 | 1,5625 |

| x | Hi(x) | abu(x) | Hq(x) |
|---|---|---|---|
| 31 | 1,0333 | 1,0323 | 1,0010 |
| 32 | 2,0000 | 1,9688 | 1,0159 |
| 33 | 1,6500 | 1,4545 | 1,1344 |
| 34 | 2,1250 | 1,5882 | 1,3380 |
| 35 | 1,4583 | 1,3714 | 1,0634 |
| 36 | 3,0000 | 2,5278 | 1,1868 |
| 37 | 1,0278 | 1,0270 | 1,0007 |
| 38 | 2,1111 | 1,5789 | 1,3370 |
| 39 | 1,6250 | 1,4359 | 1,1317 |
| 40 | 2,5000 | 2,2500 | 1,1111 |
| 41 | 1,0250 | 1,0244 | 1,0006 |
| 42 | 3,5000 | 2,2857 | 1,5313 |
| 43 | 1,0238 | 1,0233 | 1,0005 |
| 44 | 2,2000 | 1,9091 | 1,1524 |
| 45 | 1,8750 | 1,7333 | 1,0817 |
| 46 | 2,0909 | 1,5652 | 1,3359 |
| 47 | 1,0217 | 1,0213 | 1,0005 |
| 48 | 3,0000 | 2,5833 | 1,1613 |
| 49 | 1,1667 | 1,1633 | 1,0029 |
| 50 | 2,5000 | 1,8600 | 1,3441 |
| 51 | 1,5938 | 1,4118 | 1,1289 |
| 52 | 2,1667 | 1,8846 | 1,1497 |
| 53 | 1,0192 | 1,0189 | 1,0004 |
| 54 | 3,0000 | 2,2222 | 1,3500 |
| 55 | 1,3750 | 1,3091 | 1,0503 |
| 56 | 2,3333 | 2,1429 | 1,0889 |
| 57 | 1,5833 | 1,4035 | 1,1281 |
| 58 | 2,0714 | 1,5517 | 1,3349 |
| 59 | 1,0172 | 1,0169 | 1,0003 |
| 60 | 3,7500 | 2,8000 | 1,3393 |

RNDr. Jiří Nečas
Department of Mathematics
University of Economics
Ekonomická 957
148 00 Prague 4
e-mail: *JorgeMalTiempo@seznam.cz*