
Abundabilita a Eulerova funkce

J. Nečas

Abstract. The article concludes a series of earlier articles published in the Mundus Symbolicus. It shows that two different criteria - the sum of divisors of any number and the number of numbers smaller than it a relatively prime to it are almost mutually dependent.

Keywords. Abundance, Euler's function, relative Euler's function, Hildegard's function, Hildegard's quotient.

V původním textu byla v odd. 6 numerická chyba. Změny po jejím odstranění jsou vyznačeny tučně modře.

1. Úvod. V článcích [2], [4], [6] jsme se věnovali abundantním číslům, tedy číslům, s nimiž je spojena hojnost – míníme hojnost dělitelů. Tu číselně vyjadřuje abundabilita. Články [3] a [5] jsou věnovány Eulerově funkci, která vyjadřuje počet čísel s daným číslem nesoudělných. Dělitel a číslo soudělné znamenají různé skutečnosti, nicméně intuitivně spolu nějak souvisejí. Této souvislosti se zde budeme věnovat.

V souladu se zmíněnými články i zde bude

$N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ množina všech přirozených čísel (včetně nuly),

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ množina všech kladných přirozených čísel,

$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ množina všech prvočísel.

Dále použijeme označení $N_{-1} = N - \{1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$.

Symbolem $|$ budeme označovat relaci "dělí" na N_0 (tedy $x|y$, právě když existuje takové $q \in N_0$, že $y = x \cdot q$).

Přirozená čísla x, y nazýváme *soudělnými*, právě když takové existuje $q \in N_{-1}$, pro něž platí $q|x \wedge q|y$. V obráceném případě mluvíme o *nesoudělných číslech*.

Funkce F definovaná na N se nazývá *multiplikativní*, právě když pro každou dvojici x, y nesoudělných čísel platí $F(xy) = F(x) \cdot F(y)$. Je-li F multiplikativní funkce, pak $F(1) = 1$. Jestliže F a G jsou multiplikativní funkce, pak multiplikativními funkcemi jsou i jejich součin $F \cdot G$ a podíl F/G .

Libovolné číslo $x \in N$ můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru¹

¹ Abychom se vyhnuli indexům v exponentech, budeme v souladu s praxí v informatice mocninu a^b označovat pomocí infixového zápisu binární operace $a \wedge b$; i při tomto zápise platí, že operace \wedge má vyšší prioritu než běžné aritmetické operace.

$$x = (p_1^{n_1}) \cdot (p_2^{n_2}) \cdot \dots \cdot (p_M^{n_M}), \quad (1)$$

kde p_1, p_2, \dots, p_M jsou prvočísla splňující nerovnosti $p_1 < p_2 < \dots < p_M$. Vyjádření (1) nazýváme *prvočíselným rozkladem čísla x* . Prvočíselný rozklad čísla 1 je prázdný součin, který je roven 1.

Je-li F multiplikativní funkce, pak pro číslo x vyjádřené ve tvaru (1) platí

$$F(x) = F(p_1^{n_1}) \cdot F(p_2^{n_2}) \cdot \dots \cdot F(p_M^{n_M}).$$

2. Abundabilita. Součet všech dělitelů přirozeného čísla x označíme $S(x)$. S je *multiplikativní funkce*.

Pro každé $x \in \mathbb{N}$ podíl $\text{abu}(x) = S(x)/x$ nazýváme **abundabilitou čísla x** . Platí $\text{abu}(1) = 1$, pro každé $x \in \mathbb{N}_{-1}$ je $\text{abu}(x) > 1$. Abundabilita je také multiplikativní funkcí.

Číslo x se nazývá **abundantní**, resp. **dokonalé**, resp. **deficientní**, právě když $\text{abu}(x) > 2$, resp. $\text{abu}(x) = 2$, resp. $\text{abu}(x) < 2$. Uvedme několik triviálních tvrzení k ozřejmění uvedených pojmů. Pokud $x|y$, pak $\text{abu}(x) \leq \text{abu}(y)$. Tedy, je-li x abundantní číslo a $x|y$, pak y je také abundantní; je-li y deficientní číslo a $x|y$, pak x je také deficientní; je-li u dokonalé číslo a $x|u, x \neq u$, pak je x deficientní; je-li u dokonalé číslo a $u|y, y \neq u$, pak je x abundantní. Intuitivně tedy abundabilita vyjadřuje bohatost dělitelů.

Abundabilita prvočísla p je

$$\text{abu}(p) = (p + 1)/p = 1 + 1/p$$

Abundabilita n -té mocniny prvočísla p je

$$\text{abu}(p^n) = (1 - 1/p^{n+1})/(1 - 1/p).$$

Je zřejmé, že $\text{abu}(p^n)$ je rostoucí funkcí exponentu n a klesající funkcí argumentu p .

Limitní abundabilitou prvočísla p rozumíme limitu

$$\text{abu}_\infty(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{abu}(p^n) = p/(p - 1) = 1 + 1/(p - 1). \quad (2)$$

Pro libovolné prvočísla p a libovolné přirozené číslo n platí

$$\text{abu}(p^n) < \text{abu}_\infty(p). \quad (3)$$

V článku [6] bylo ukázáno, že obor hodnot funkce abu není ohraničený. Platí tedy

$$\inf(\text{abu}) = 1, \sup(\text{abu}) = +\infty.$$

3. Eulerova funkce. Pro každé přirozené číslo x je definována **Eulerova funkce** $\varphi(x)$ jako počet přirozených čísel, která jsou menší nebo rovná číslu x a jsou s číslem x nesoudělná. Rovněž Eulerova funkce je multiplikativní. Platí $\varphi(1) = 1$, pro libovolné prvočísla p je $\varphi(p) = p - 1$, pro libovolné $p \in \mathbb{P}$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$\varphi(p^n) = (p - 1) p^{n-1}$$

Definujme ještě **relativní Eulerovu funkci**

$$\Phi(x) = \varphi(x)/x,$$

která je také multiplikatívni. Hodnoty relativní Eulerovy funkce závisejí jen na prvočíslech vyskytujících se v rozkladu čísla x ; nejsou tedy závislé na tom, v jaké mocnině se tam tato prvočísla vyskytují. Pro libovolnou (n -tou) mocninu prvočísla p platí

$$\Phi(p^n) = (p - 1) / p = (1 - p^{-1}).$$

Pro obor hodnot $\mathcal{H}(\Phi)$ relativní Eulerovy funkce platí

$$\sup \mathcal{H}(\Phi) = 1, \inf \mathcal{H}(\Phi) = 0 \quad (4)$$

(viz [3]).

4. Hildegardina funkce. Čísla, která jsou z hlediska dělitelnosti "bohatší", mají větší hodnotu abundability, avšak menší hodnotu relativní Eulerovy funkce. Abychom je mohli pohodlněji porovnávat, definujme **Hildegardinu² funkci** jako převrácenou hodnotu relativní Eulerovy funkce:

$$Hi(x) = 1 / \Phi(x).$$

Hildegardina funkce je zřejmě rovněž multiplikatívni; pro libovolnou (n -tou) mocninu prvočísla p tedy platí

$$Hi(p^n) = p / (p - 1) = 1 / (1 - p^{-1}) \quad (5)$$

Porovnáme-li vztahy (2) a (5), vidíme, že pro libovolné $p \in P$ a $n \in N$ platí

$$Hi(p^n) = Hi(p) = abu_{\infty}(p),$$

a tedy podle (3) pro libovolný exponent $n \in N$ je

$$abu(p^n) < Hi(p).$$

Protože multiplikatívni funkce abu i Hi nabývají jen kladných hodnot, pro libovolné číslo $x \in N_1$ platí

$$abu(x) < Hi(x). \quad (6)$$

Ze rovností (4) plyne

² Sv. Hildegarda z Bingen (1098-1179), všestranně velmi vzdělaná žena, žila v době, kdy se o funkcích neuvažovalo; volbou názvu funkce tuto pozoruhodnou ženu připomínám, vzhledem k časovému odstupu se snad nedostávám do problémů s autorským zákonem a – aspoň doufám – nehrozí nějaká nepříjemná duplicita v názvu.

$$\inf (H_i) = 1, \sup (H_i) = +\infty.$$

5. Hildegardin podíl. Čísla, která jsou z hlediska dělitelnosti bohatší, mají větší hodnoty funkcí abu i H_i . Určitý vztah mezi nimi vyjadřuje nerovnost (6). Pro jednoduchost vyjádření definujeme ještě pro každé $x \in \mathbb{N}$ **Hildegardin podíl**

$$H_q(x) = H_i(x) / abu(x).$$

H_q je rovněž multiplikativní funkcí, tedy $H_q(1) = 1$. pro libovolné $x \in \mathbb{N}$ pak z (6) plyne

$$H_q(x) > 1.$$

Pro libovolné prvočíslo $p \in \mathbb{P}$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} H_q(p) &= 1/(1 - 1/p^2), \\ H_q(p^n) &\leq 1/(1 - 1/p^2), \\ \sup_n H_q(p^n) &= \max_n H_q(p^n) = H_q(p) = 1/(1 - 1/p^2), \end{aligned} \tag{7}$$

protože

$$\begin{aligned} H_q(p^n) &= H_i(p^n) / abu(p^n) \leq H_i(p) / abu(p) = H_q(p) = \\ &= (1+1/(p-1))/(1+1/p) = 1/(1-1/p^2), \end{aligned}$$

přičemž $abu(p^n)$ je rostoucí funkcí v proměnné n .

Ukážeme, že hodnoty podílu H_q nejsou neomezené, nýbrž dokonce jsou omezeny konstantou menší než 2, což znamená, že neomezené funkce H_i a abu se chovají svým způsobem podobně. Budeme hledat "co nejmenší"³ horní závoru množiny hodnot $\mathcal{H}(H_q)$ funkce H_q .

Hodnoty $H_i(x)$, $abu(x)$ a $H_q(x)$ pro $x \leq 60$ jsou v tabulce na konci článku.

6. Horní omezení Hildegardina podílu. Necht' $x \in \mathbb{N}$ s prvočíselným rozkladem (1). Podle (7) je

$$H_q(x) \leq \prod_{j=1}^M [1/(1 - 1/p_j^2)].$$

Protože pro libovolné prvočíslo p je $1/(1 - 1/p^2) > 1$, platí omezení⁴

$$H_q(x) \leq \prod_{p \in \mathbb{P}} [1/(1 - 1/p^2)]. \tag{8}$$

³ Co nejblíží supremu, které neumíme přesně určit.

⁴ Základní informaci o nekonečných součinech lze nalézt v knize [1].

Protože pro každé prvočíslo p je $Hq(p) = 1/(1 - 1/p^2)$, pro součin prvočísel v první mocnině se hodnota funkce Hq může hodnotě $\prod_{p \in P} [1/(1 - 1/p^2)]$ libovolně přiblížit⁵, a tedy platí

$$\sup Hq(x) = \prod_{p \in P} [1/(1 - 1/p^2)]. \quad (9)$$

V dalším textu půjde tedy o hledání horního odhadu pro tento nekonečný součin.

Uvedme nejdříve dvě lemmata.

Lemma 1: Necht' $0 < \epsilon \leq \delta < 1/2$. Necht' $\gamma = 1/(1 - \delta)$ Pak

$$1/(1 - \epsilon) < 1 + \gamma \epsilon$$

Důkaz: Využijeme jednak toho, že $1/(1 - \epsilon)$ je součet nekonečné geometrické řady s prvním členem 1 a kvocientem ϵ , jednak skutečnosti, že funkce $1/(1 - \xi)$ je rostoucí v argumentu ξ . Postupně upravujme a omezujme:

$$\begin{aligned} 1/(1 - \epsilon) &= 1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \dots = 1 + \epsilon(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \dots) = \\ &= 1 + \epsilon \cdot (1/(1 - \epsilon)) \leq 1 + \epsilon \cdot (1/(1 - \delta)) = 1 + \gamma \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma 2: Necht' $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots\}$ je klesající posloupnost kladných čísel, $\epsilon_1 \leq \delta < 1/2$, $\gamma = 1/(1 - \delta)$. Pak

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1/(1 - \epsilon_i)) \leq \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \gamma \epsilon_i).$$

Důkaz. Aplikujeme lemma 1 na všechny činitele nekonečného součinu.

Vraťme se k nekonečnému součinu v nerovnosti (9). Aplikujeme na něj lemma 2, přičemž položíme $\epsilon_i = 1/p_i^2$, kde je i -té prvočíslo, a $\delta = 1/4$ (tedy $\gamma = 4/3$); využijeme platnost nerovnosti

$$\ln(1 + x) \leq x$$

pro všechna nezáporná reálná čísla x a známou identitu

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \pi^2/6: \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \prod_{p \in P} [1/(1 - 1/p^2)] &= \exp(\ln \prod_{p \in P} [1/(1 - 1/p^2)]) = \\ &= \exp(\sum_{p \in P} \ln[1/(1 - 1/p^2)]) \leq \exp(\sum_{p \in P} \ln[1 + (4/3)/p^2]) \leq \\ &\leq \exp(\sum_{p \in P} (4/3)/p^2) \leq \exp((4/3)\sum_{p \in P} p^{-2}) \leq \exp((4/3)\sum_{j=2}^{\infty} j^{-2}) = \\ &= \exp((4/3)(\pi^2/6 - 1)) \approx \exp 0,86 \approx 2,363 \end{aligned}$$

⁵ Podrobněji: V souladu s článkem [6] i -té prvočíslo označme q_i , dále označme $b_n = \prod_{1^n} q_i$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} Hq(b_n) = \prod_{p \in P} [1/(1 - 1/p^2)] = \sup Hq(x)$

Číslo 2,363 je tedy horní závorou množiny $\mathcal{H}(\text{Hq})$ hodnot Hildegardina podílu⁶.

Ukážeme ještě, jak lze tento odhad ještě zlepšit. Pravou stranu rovnosti (9) vyjádříme jako součin dvou součinů:

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} [1/(1 - 1/p^2)] = \prod_{p \in \mathbb{P} \wedge p \leq \beta} [1/(1 - 1/p^2)] \cdot \prod_{p \in \mathbb{P} \wedge p > \beta} [1/(1 - 1/p^2)], \quad (11)$$

kde β je vhodně zvolené přirozené číslo. Zvolme $\beta = 29$. Ze vztahů (9) a (11) dostaneme

$$\begin{aligned} \sup(\text{Hq}) &= \prod_{p \in \mathbb{P}} [1/(1 - 1/p^2)] = \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P} \wedge p \leq 29} [1/(1 - 1/p^2)] \cdot \prod_{p \in \mathbb{P} \wedge p \geq 31} [1/(1 - 1/p^2)]. \end{aligned}$$

První činitel je konečným součinem 10 činitelů a snadno jej vypočítáme:

$$\prod_{p \in \mathbb{P} \wedge p \leq 29} [1/(1 - 1/p^2)] \approx 1,6331.$$

Protože druhý činitel je větší než 1, platí

$$\sup(\text{Hq}) > \prod_{p \in \mathbb{P} \wedge p \leq 29} [1/(1 - 1/p^2)],$$

tedy

$$\sup(\text{Hq}) > 1,633$$

Druhý činitel je nekonečným součinem a jeho hodnota se na první pohled liší jen málo od 1; budeme jej majorizovat dříve uvedeným způsobem. Použijeme opět lemma 2, přičemž nyní bude $\epsilon_1 = 1/31^2 = 1/961 = 0,00104$; položíme $\delta = 0,00105$, a tedy $\gamma \approx 1,00106$ (po zaokrouhlení nahoru). Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \prod_{p \in \mathbb{P} \wedge p \geq 31} [1/(1 - 1/p^2)] &< \prod_{p \in \mathbb{P} \wedge p \geq 31} (1 + \gamma / p^2) = \\ &= \exp [\ln \prod_{p \in \mathbb{P} \wedge p \geq 31} (1 + \gamma / p^2)] = \exp [\sum_{p \in \mathbb{P} \wedge p \geq 31} \ln (1 + \gamma / p^2)] \leq \\ &\leq \exp [\gamma \sum_{p \in \mathbb{P} \wedge p \geq 31} p^{-2}] < \exp [\gamma \sum_{j=31}^{\infty} j^{-2}] \approx \\ &\approx \exp (1,00106 \cdot 0,0328) \approx \exp 0,0329 \approx \mathbf{1,0334472}; \end{aligned} \quad (12)$$

přičemž jsme preferovali zaokrouhlení nahoru. Ve výpočtu (12) jsme řadu se čtverci prvočísel ve jmenovateli majorizovali řadou, která má ve jmenovateli čtverce přirozených čísel; v obou případech počínajíc 31.

K vyjádření součtu $\sum_{j=31}^{\infty} j^{-2}$ využíváme identitu (10):

$$\sum_{j=31}^{\infty} j^{-2} = \pi^2/6 - \sum_{j=1}^{30} j^{-2} \approx 1,64493 - 1,61215 \approx 0,0328,$$

a tedy

$$\gamma \sum_{j=31}^{\infty} j^{-2} \approx 1,00106 \cdot 0,0328 < 0,0329.$$

⁶ Používáme zápis \exp y místo obvyklejšího e^x .

Pro $\sup(H_q)$ tak dostáváme horní odhad

$$\sup(H_q) \approx 1,6331 \cdot \mathbf{1,03345} \approx \mathbf{1,688},$$

a tak

$$\sup(H_q) \in (1,633, \mathbf{1,688}) .$$

Neohraničené funkce abundabilita, související s počtem dělitelů, a Hildegardina funkce, vyjadřující inverzním způsobem počet čísel s daným nesoudělných, se tedy liší poměrně nevýrazně; jejich podíl leží v intervalu $(1; 1,69)$.

References

- [1] Jarník, V.: Diferenciální počet II. Praha, Academia 1984
- [2] Nečas, J.: Abundantní čísla. MS 25, 2017
- [3] Nečas, J.: Relativní Eulerova funkce. MS 25, 2017
- [4] Nečas, J.: Lichá abundantní čísla. MS 26, 2018
- [5] Nečas, J.: Hodnoty Eulerovy funkce. MS 28, 2020
- [6] Nečas, J.: Neomezená abundabilita. MS 29, 2021

Tabulka hodnot Hildegardiny funkce $H_i(x)$, abundability $abu(x)$ a Hildegardina podílu $H_q(x)$ pro hodnoty $x \leq 60$

x	$H_i(x)$	$abu(x)$	$H_q(x)$
1	1	1	1
2	2,0000	1,5000	1,3333
3	1,5000	1,3333	1,1250
4	2,0000	1,7500	1,1429
5	1,2500	1,2000	1,0417
6	3,0000	2,0000	1,5000
7	1,1667	1,1429	1,0208
8	2,0000	1,8750	1,0667
9	1,5000	1,4444	1,0385
10	2,5000	1,8000	1,3889
11	1,1000	1,0909	1,0083
12	3,0000	2,3333	1,2857
13	1,0833	1,0769	1,0060
14	2,3333	1,7143	1,3611
15	1,8750	1,6000	1,1719
16	2,0000	1,9375	1,0323
17	1,0625	1,0588	1,0035
18	3,0000	2,1667	1,3846
19	1,0556	1,0526	1,0028
20	2,5000	2,1000	1,1905
21	1,7500	1,5238	1,1484
22	2,2000	1,6364	1,3444
23	1,0455	1,0435	1,0019
24	3,0000	2,5000	1,2000
25	1,2500	1,2400	1,0081
26	2,1667	1,6154	1,3413
27	1,5000	1,4815	1,0125
28	2,3333	2,0000	1,1667
29	1,0357	1,0345	1,0012
30	3,7500	2,4000	1,5625

x	$H_i(x)$	$abu(x)$	$H_q(x)$
31	1,0333	1,0323	1,0010
32	2,0000	1,9688	1,0159
33	1,6500	1,4545	1,1344
34	2,1250	1,5882	1,3380
35	1,4583	1,3714	1,0634
36	3,0000	2,5278	1,1868
37	1,0278	1,0270	1,0007
38	2,1111	1,5789	1,3370
39	1,6250	1,4359	1,1317
40	2,5000	2,2500	1,1111
41	1,0250	1,0244	1,0006
42	3,5000	2,2857	1,5313
43	1,0238	1,0233	1,0005
44	2,2000	1,9091	1,1524
45	1,8750	1,7333	1,0817
46	2,0909	1,5652	1,3359
47	1,0217	1,0213	1,0005
48	3,0000	2,5833	1,1613
49	1,1667	1,1633	1,0029
50	2,5000	1,8600	1,3441
51	1,5938	1,4118	1,1289
52	2,1667	1,8846	1,1497
53	1,0192	1,0189	1,0004
54	3,0000	2,2222	1,3500
55	1,3750	1,3091	1,0503
56	2,3333	2,1429	1,0889
57	1,5833	1,4035	1,1281
58	2,0714	1,5517	1,3349
59	1,0172	1,0169	1,0003
60	3,7500	2,8000	1,3393

RNDr. Jiří Nečas
 Department of Mathematics
 University of Economics
 Ekonomická 957
 148 00 Prague 4
 e-mail: JorgeMalTiempo@seznam.cz