Fibonacciova čísla

Základní Fibonacciova posloupnost

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad (1)$$

$$a_0 = 0;\ a_1 = 1$$

Členy základní posloupnosti se nazývají **Fibonacciova čísla**

Fibonacciova čísla menší než 50 000 jsou:

n	*an*
0	0
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21

n	*an*
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987

n	*an*
17	1 597
18	2 584
19	4 181
20	6 765
21	10 946
22	17 711
23	28 657
24	46 368

Můžeme je vyjádřit jako funkci proměnné *n*:

$$a_n = k_1 \sigma_1^{\,n} + k_2 \sigma_2^{\,n}\ , \qquad (2)$$

kde

$$\sigma_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618,$$

$$\sigma_2 = (1 - \sqrt{5})/2 \approx -0{,}618,$$

$$k_1 = 1/\sqrt{5} = 0{,}4472$$

$$k_2 = -1/\sqrt{5} = -0{,}4472$$

Do vzorce (2) lze dosazovat i záporná *n*. Tabulka na následující stránce ukazuje hodnoty a_n pro $n \in \langle -24; 24\rangle$. K stejným hodnotám ovšem vede i "zpětný" rekurentní výpočet podle upraveného vzorce (1):

$$a_n = a_{n+2} - a_{n+1} \tag{1'}$$

Porovnání hodnot pro n lišící se znaménkem, avšak se stejnou absolutní hodnotou, je přinejmenším zajímavé. Je vidět, že

$$a_n = a_{-n} \,.\, (-1)^{n+1} \tag{3}$$

n	a_n		n	a_n
0	0		0	0
1	1		-1	1
2	1		-2	-1
3	2		-3	2
4	3		-4	-3
5	5		-5	5
6	8		-6	-8
7	13		-7	13
8	21		-8	-21
9	34		-9	34
10	55		-10	-55
11	89		-11	89
12	144		-12	-144
13	233		-13	233
14	377		-14	-377
15	610		-15	610
16	987		-16	-987
17	1597		-17	1597
18	2584		-18	-2584
19	4181		-19	4181
20	6765		-20	-6765
21	10946		-21	10946
22	17711		-22	-17711
23	28657		-23	28657
24	46368		-24	-46368

Vzorec (1') můžeme pomocí substituce $n = -m - 2$ převést do tvaru

$$a_{-(m+2)} = a_{-m} - a_{-(m+1)} \tag{4}$$

který je příhodný pro nekladné indexy (tedy $m \geq 0$; zápis indexu začíná znaménkem "-").