

Dělitelnost 7, 11 a 13

Nechť

$$n = \sum_{j=0}^k a_j \cdot 10^j$$

$$n_7 = (a_0 + a_6 + a_{12} + \dots) + 3(a_1 + a_7 + a_{13} + \dots) + 2(a_2 + a_8 + a_{14} + \dots) - \\ - (a_3 + a_9 + a_{15} + \dots) - 3(a_4 + a_{10} + a_{16} + \dots) - 2(a_5 + a_{11} + a_{17} + \dots)$$

$$n_{11} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot a_j$$

$$n_{13} = (a_0 + a_6 + a_{12} + \dots) - 3(a_1 + a_7 + a_{13} + \dots) - 4(a_2 + a_8 + a_{14} + \dots) - \\ - (a_3 + a_9 + a_{15} + \dots) + 3(a_4 + a_{10} + a_{16} + \dots) + 4(a_5 + a_{11} + a_{17} + \dots)$$

Ve výrazech pro n_7 a n_{11} klademe $a_j = 0$ pro $j > k$.

Pak pro $r \in \{7, 11, 13\}$ patří čísla n a n_r do téže zbytkové třídy modulo r .

Speciálně $r|n$, právě když $r|n_r$.

Důkaz nebudeme dělat obecně; naznačíme jej nejdříve pro $r = 7$ a $k = 8$ (či pro $k \leq 8$; pokud je $k < 8$, položíme $a_{k+1}, \dots, a_8 = 0$). Myšlenka důkazu pro libovolné k je z postupu vidět; jde mi o to, aby text nebyl příliš nepřehledný. Dále pak uděláme obecný důkaz pro $r = 11$.

$$r = 7$$

Ukážeme, že $7 \mid (n - n_7)$:

$$n - n_7 = a_0(1 - 1) + a_1(10 - 3) + a_2(100 - 2) + a_3(1\,000 + 1) + \\ + a_4(10\,000 + 3) + a_5(100\,000 + 2) + a_6(1\,000\,000 - 1) + \\ + a_7(10\,000\,000 - 3) + a_8(100\,000\,000 - 2) = \\ = 7 \cdot (a_1 + 14a_2 + 143a_3 + 1\,429a_4 + 14\,286a_5 + 142\,857a_6 + \\ + 1\,428\,571a_7 + 14\,285\,714a_8)$$

Tedy $n - n_7$ je násobkem 7.

Nyní ještě ukážeme, že $11 \mid (n - n_{11})$:

$$n - n_{11} = \sum_{j=0}^k a_j \cdot 10^j - \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot a_j = \sum_{j=0}^k a_j \cdot [10^j - (-1)^j]$$

Upravujeme výraz v hranaté závorce. Pro $j = 0$ je roven $1 - 1$, tedy 0, což znamená, že je násobkem 11. Pro sudé $j \neq 0$ je

$$\begin{aligned} 10^j - (-1)^j &= 100^{j/2} - 1 = (100 - 1) \cdot (100^{j/2-1} + 100^{j/2-2} + \dots + 1) = \\ &= 11 \cdot 9 \cdot (100^{j/2-1} + 100^{j/2-2} + \dots + 1) \end{aligned}$$

Pro liché j pak máme

$$\begin{aligned} 10^j - (-1)^j &= 10^j + 1 = (10 + 1)(10^{j-1} - 10^{j-2} + \dots + 10 - 1) = \\ &= 11 \cdot (10^{j-1} - 10^{j-2} + \dots - 10 + 1) \end{aligned}$$

Střídání znamének v závorce při lichém j začíná i končí kladným znaménkem.

Rozdíl $n - n_{11}$ je tedy skutečně násobkem 11

7: 1, 3, 2, -1, -3, -2

11: 1, -1

13: 1, -3, -4, -1, 3, 4