

Diferenciální rovnice - pokračování

Řešme obecně diferenciální rovnici, kterou jsme si už posledně uvedli:

$$e) \ y'' + 4y' + 13y = x$$

Je to lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty a s pravou stranou. Řešení v takovémto případě hledáme ve tvaru

$$y = y_{OZ} + y_{PN}$$

y_{OZ} je obecné řešení zkrácené rovnice (tedy bez pravé strany)

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

V něm se vyskytnou dvě konstanty, které k obecnému řešení patří. y_{PN} je pak jedno libovolné konkrétní řešení rovnice s pravou stranou (N znamená "nezkrácená"), které pro určité konkrétní pravé strany umíme najít. Obecně je to popsáno v učebnici, já se zaměřím jen na dva konkrétní případy. Zde máme na pravé straně mnohočlen (prvního řádu).

Nejdříve hledáme řešení zkrácené rovnice. Její charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

nemá reálné kořeny, jejím řešením jsou imaginární čísla $-2 \pm 3i$. Obecné řešení zkrácené diferenciální rovnice v tomto případě je

$$e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

Reálná část se promítne do exponentu, imaginární do argumentu goniometrických funkcí; nezapomenout, že jak reálnou, tak imaginární část pak násobíme proměnnou x .

Na pravé straně zadané rovnice je mnohočlen 1. stupně. Pokud je na pravé straně mnohočlen n -tého stupně, hledáme partikulární řešení také ve tvaru mnohočlenu n -tého stupně, v našem případě $n = 1$, a tedy budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$y_{PN} = ax + b$$

Koeficienty a , b určíme dosazením do původní diferenciální rovnice, před tím vypočítáme:

$$y_{PN}' = a, y_{PN}'' = 0.$$

Původní rovnice:

$$y'' + 4y' + 13y = x$$

Dosadíme:

$$0 + 4a + 13(ax + b) = x$$

Tedy:

$$13ax + (4a + 13b) = x$$

Jde o rovnost mnohočlenů, musí být:

$$13a = 1$$

$$4a + 13b = 0.$$

$$\text{Tedy } a = 1/13, b = -4/169$$

Partikulární řešení (po dosazení):

$$y_{PN} = ax + b = (1/13)x - 4/169$$

Obecné řešení původní rovnice (obsahuje dvě konstanty, které by se vypočítaly, pokud by byly dány počáteční podmínky)

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + x/13 - 4/169$$

=====

Další příklad:

Máme řešit diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$$

s počátečními podmínkami

$$y(0) = 2$$

$$y'(0) = 0$$

Zde musíme absolvovat všechny tři kroky

- 1) Obecné řešení zkrácené rovnice $y'' + 2y' + 1 = 0$
- 2) Partikulární řešení nezkrácené rovnice
- 3) Výpočet konstant podle počátečních podmínek

1) Obecné řešení zkrácené rovnice $y'' + 2y' + y = 0$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

má jeden dvojnásobný kořen $\lambda = -1$

V případě, že charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen, má řešení diferenciální rovnice tvar (už je označím y_{0z} s ohledem na to, že hledáme řešení zkrácené rovnice)

$$y_{0z} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Zkušenost: Když s nějakým řešením nevystačíme (tady je to e^{-x} , přičemž kořen -1 je dvojnásobný a my potřebujeme dvě nezávislá řešení), tak je vynásobíme x : druhé řešení je $x e^{-x}$

2) Partikulární řešení rovnice $y'' + 2y' + 1 = 6e^{-x}$

Ve většině případů, je-li na pravé straně exponenciála $q \cdot e^{rx}$, hledáme partikulární řešení ve tvaru $a \cdot e^{rx}$, a najdeme dosazením. V našem případě by to bylo $a \cdot e^{-x}$. Jenže násobek funkce e^{-x} je řešením zkrácené rovnice, ať by bylo a jakékoli, dosazením do levé strany bychom dostali 0 . A totéž platí pro x -násobek této funkce, tedy $x \cdot e^{-x}$. A tak musíme pravou stranu hledat ve tvaru

$$y_{PN} = a \cdot x^2 e^{-x}.$$

Abychom funkci mohli dosadit do původní rovnice, musíme vypočítat její 1. a 2. derivaci:

$$y_{PN}' = a \cdot (2x e^{-x} + x^2 (-e^{-x})) = a e^{-x} (2x - x^2)$$

Vytýkat před závorku ještě x by bylo nemoudré, funkci budeme dále derivovat, a derivovat součin tří funkcí by příjemné nebylo.

$$y_{PN}'' = [a e^{-x} (2x - x^2)]' = a [(-e^{-x}) (2x - x^2) + e^{-x} (2 - 2x)] =$$

$$= a e^{-x} [-(2x - x^2) + (2 - 2x)] = a e^{-x} [x^2 - 4x + 2]$$

Dosadíme do původní rovnice; aby nevzniklo přílišné monstrum, ze všech členů vytknu $a \cdot e^{-x}$:

$$y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$$

$$a \cdot e^{-x} [(x^2 - 4x + 2) + 2(2x - x^2) + x^2] = 6 e^{-x}$$

Po výpočtu obsahu hranaté závorky dostanu

$$a \cdot e^{-x} \cdot 2 = 6 e^{-x}$$

$$\text{Tedy } a = 3$$

Výpočet byl poněkud zdoluhavější. Kdyby se nám bývaly v hranaté závorce členy s x a x^2 nevyrušily, nemohli bychom a najít. Kdyby ovšem k takové situaci došlo, je to známka toho, že jsme ve výpočtu udělali chybu. Tento poněkud zdoluhavější výpočet tak v sobě obsahuje jako odměnu i jakousi zkoušku správnosti výpočtu.

Hledané partikulární řešení je:

$$y_{PN} = 3 \cdot x^2 e^{-x}$$

Obecné řešení je

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3 x^2 e^{-x} = (C_1 + C_2 x + 3x^2)e^{-x}$$

3) Určení konstant podle počátečních podmínek

Počáteční podmínky:

$$y(0) = 2$$

$$y'(0) = 0$$

Víme:

$$y = (C_1 + C_2 x + 3x^2)e^{-x}$$

Vypočítáme

$$y' = (C_2 + 6x)e^{-x} - (C_1 + C_2 x + 3x^2)e^{-x} =$$

$$= [(C_2 - C_1) + (6 - C_2)x - 3x^2] e^{-x}$$

Dosadíme $x=0$ (a vděčně si uvědomíme, že $e^0 = 1$):

$$2 = C_1$$

$$0 = C_2 - C_1$$

Tedy $C_1 = C_2 = 2$ a hledané partikulární řešení je

$$y = (3x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}$$

Řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty – shrnutí

Tři kroky:

1) Obecné řešení Y_{0z} zkrácené rovnice (tedy bez pravé strany) – pomocí algebraického řešení charakteristické rovnice

2) Určení jednoho partikulárního řešení y_{PN} rovnice s pravou stranou – umět pro pravou stranu tvaru mnohočlenu, exponenciály, případně jejich součinu (pro tento obecný případ zde neuvádím příklad; vzoreček je v učebnici – viz poznámku dále). Pokud je rovnice bez pravé strany, tak tento bod odpadá. Obecné řešení rovnice s pravou stranou: $y = y_{OZ} + y_{PN}$

3) Pokud jsou dány počáteční podmínky, dosadíme je do obecného řešení (popř. i do jeho derivace) a najdeme konstanty, které obsahuje obecné řešení.

Poznámka

V učebnici se pracuje s pravou stranou ve tvaru

$$e^{px} P(x),$$

kde P je mnohočlen stupně m . Podotýkám, že sem patří i $m = 0$, tedy $P(x)$ může být konstanta.

Řešení hledáme ve tvaru

$y_{PN} = e^{px} Q(x) \cdot x^r$, kde Q je polynom stupně m a r je číslo, které vyjadřuje, kolikanásobný kořen charakteristické rovnice je číslo p . Když p není kořenem charakteristické rovnice, je $r=0$, a tedy $x^r = 1$.

Když jsme řešili rovnici

$$y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$$

měli jsme $P(x) = 6$ (konstanta), $r = 2$.

Při hledání partikulárního řešení jsme položili $q(x) = a$ (konstanta), $r = 2$, protože -1 je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice.

Pravou stranu rovnice

$$y'' + 4y' + 13y = x$$

jsmo mohli zapsat ve tvaru $e^{0x} \cdot x$

Určité rozpaky mohou vzniknout v případě, že mezi kořeny charakteristické rovnice je 0. Víme, že

$$e^{0x} = e^0 = 1$$

Řešme ještě obecně rovnici

$$y'' + y' = x - 1$$

1) Obecné řešení zkrácené rovnice $y'' + y' = 0$

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

Její řešení je $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$

Obecné řešení zkrácené rovnice:

$$y_{0z} = C_1 e^{-x} + C_2$$

2) Pravou stranu můžeme pro použití vzorečku z učebnice zapsat ve tvaru $e^{0x} (x + 1)$, a řešení hledat ve tvaru

$$e^{0x} (ax + b) \cdot x;$$

$r = 1$, protože 0 je řešením charakteristické rovnice.

Lze ale postupovat jednodušeji a méně formálně.

Pravá strana je $x + 1$, vedlo by to k hledání partikulárního řešení ve tvaru $ax + b$. Jenže na levé straně není y , je tam jen y' a y'' . Číslo b by se nám dosazením do levé strany úplně ztratilo. A tak pravou stranu budeme hledat ve tvaru $(ax+b) \cdot x$ (opět si pomáháme vynásobením x).

Hledání partikulárního řešení podle pravé strany:

$$y_{PN} = (ax + b) \cdot x = ax^2 + bx$$

Pak

$$y_{PN}' = 2ax + b; y_{PN}'' = 2a$$

Dosadím do původní rovnice $y'' + y' = x - 1$:

$$2a + (2ax + b) = x - 1$$

Tedy:

$$2ax + (2a + b) = x - 1,$$

to znamená:

$$2a = 1$$

$$2a + b = -1$$

Vypočítáme

$$a = 1/2; b = -2$$

Partikulární řešení:

$$y_{PN} = (1/2) x^2 - 2x$$

Obecné řešení zadané rovnice:

$$y_{OZ} = C_1 e^{-x} + (1/2) x^2 - 2x + C_2$$

Mezi diferenciální rovnice jsme jen nahlédli. Snad aspoň natolik, aby bylo vidět, jak úžasným prostředkem pro popis skutečnosti plné spojitých změn jsou. A tak by bylo hezké, kdyby konec tohoto základního kursu matematiky nebyl tečkou za matematikou ani za diferenciálními rovnicemi, ale impulsem pro cestu dále k výšinám této úžasné, materiální svět přesahující vědy. Přeji všem upřímnou radost z poznávání.

JNe