Diferenciální rovnice

Jako úvodní četbu vám jsem vám posledně nabídl své pohádky

Hrnečku vař
aneb separace proměnných v české pohádce

Pohádkový les
(Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s periodickým řešením)

Rybníček Kaprníček
Růst a jeho meze

http://jirinecas.jetmouse.cz/Pohadky.htm

Co je diferenciální rovnice?

Je to rovnice, která obsahuje proměnnou x a neznámou funkci y = f(x) včetně jejích derivací.

Příklady:

a) $y' = 4x + 3$

b) $y' = 2y$

c) $y'' + 4y' + 3 = 0$

d) $y''' = y^{(3)} = 12\ x^2 + 6\ x + 1$

Nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje, se nazývá řád diferenciální rovnice. Derivace vyšších řádů někdy označujeme číslem v závorce na místě horního indexu. Příklady a) a b) ukazují diferenciální rovnice 1. řádu, c) je rovnice 2. a d) 3. řádu.

Rovnice uvedené v bodech a) a d) umíte řešit (aspoň doufám). Přesto se u nich zastavme.

a) $y' = 4x + 3$

Známe derivaci, chceme znát primitivní funkci. Tu dostaneme obyčejným výpočtem neurčitého integrálu:

$y = \int (4x + 3)\, dx = \mathbf{2x^2 + 3x + C}$

Tak jsme našli obecné řešení této rovnice; vyskytuje se v něm konstanta C. U diferenciálních rovnic někdy v zadání je najít tzv. partikulární řešení vyhovující zadaným počátečním podmínkám (k rovnici n-tého řádu patří n počátečních podmínek). Taková úloha pak má tvar:

Najděte funkci y, která je řešením rovnice

$y' = 4x + 3$

a pro něž platí např. $y(0) = 2$, tj. pro $x = 0$ je $y = 2$.

Vypočítali jsme

$\boxed{y = 2x^2 + 3x + C}$, dosadíme $x = 0$, $y = 2$:

$2 = 0 + 0 + C$, tedy $C = 2$; požadované partikulární řešení tedy je

$\boxed{\mathbf{y = 2x^2 + 3x + 2}}$

Pojďme teď na příklad d)…

$y''' = y^{(3)} = 12\, x^2 + 6\, x + 1$

Doplňme jej počátečními podmínkami

$y(0) = -1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 24$

Toto je obvyklý tvar počátečních podmínek; někdy však může být jiný - hledaná funkce nemusí být v 0 definovaná apod.

Nejdříve však řešme úlohu obecně

Co je to $y^{(3)}$? Je to třetí derivace, tedy derivace druhé derivace.

Proto

$y'' = \int y''' \, dx = \int (12\, x^2 + 6\, x + 1)\, dx = 4\, x^3 + 3\, x^2 + x + C_1$

Index u konstanty používám, protože vím, že budu integrovat dále a budou se objevovat další integrační konstanty.

Stejně

$y' = \int y'' \, dx = \int (4 x^3 + 3 x^2 + x + C_1) \, dx =$

$= x^4 + x^3 + x^2/2 + C_1 x + C_2,$

a tedy

$y = \int y' \, dx = \int (x^4 + x^3 + x^2/2 + C_1 x + C_2) \, dx =$

$= x^5/5 + x^4/4 + x^3/6 + C_1 x^2 / 2 + C_2 x + C_3 =$

$= \boxed{x^5/5 + x^4/4 + x^3/6 + C_0 x^2 + C_2 x + C_3}$

Poslední úprava je jen taková estetická, protože $C_1/2$ je konstanta (poloviční než C_1), nepůsobí hezky psát $C_1/2$, ale je lepší tento celek označit jako konstantu, zde jsem ji označil C_0; někdy se v tomto případě označení nemění a použilo by se C_1. U úloh, kde jsou zadány počáteční podmínky, nemá "modrá" úprava smysl.

Je vidět, že se *na integrační konstanty nesmí zapomínat*, zde ty první dvě se v konečném výsledku násobí druhou, resp. první mocninou proměnné x.

Tak, jak jsme si teď ukázali, se řeší diferenciální rovnice, které jsou ve tvaru (nebo se na tento tvar dají uvést)

$y^{(n)} = f(x).$

U těchto rovnic lze počáteční podmínky pro derivace počítat postupně. Když jsme vypočítali

$y'' = 4 x^3 + 3 x^2 + x + C_1$

využijeme podmínku $y''(0) = 24$ a dosazením nuly za x a 24 za y" zjistíme, že $C_1 = 24$, pak

$y' = x^4 + x^3 + x^2/2 + C_1 x + C_2 = x^4 + x^3 + x^2/2 + 24x + C_2,$

dosazením počáteční podmínky $y'(0) = 2$ dostaneme $C_2 = 2$, tj.

$y' = x^4 + x^3 + x^2/2 + 24x + 2,$

a tak

$y = x^5/5 + x^4/4 + x^3/6 + 12\ x^2 + 2\ x + C_3$

Protože y(0) = -1 a při dosazení nuly za x jsou všechny členy s mocninami x nulové, dostáváme $C_3 = -1$. Partikulární řešení rovnice, které vyhovuje zadaným počátečním podmínkám, tedy je

$$\boxed{y = x^5/5 + x^4/4 + x^3/6 + 12\ x^2 + 2\ x - 1}$$

Rovnice z příkladů b) a c) vypadají jinak, tam se vyskytují funkce y i její derivace. Takových rovnic je spousta, a my se budeme zabývat jen některými z nich.

Dříve než se k b) a c) vrátím, uvedu zde ještě jednu:

e) y" + 4y' + 13y = x

Je zapsaná tak, že na levé straně je lineární kombinace funkce y a jejích derivací, na pravé straně je funkce proměnné x.

Protože na levé straně je zmíněná lineární kombinace (funkce y a jejích derivací), je to <u>lineární diferenciální rovnice</u>. Koeficienty u y a derivací jsou 1, 4 a 13. U některých diferenciálních rovnic mohou tyto koeficienty záviset na x (takovými rovnicemi se zabývat nebudeme), když tyto koeficienty na x nezávisí, říkáme, že je to rovnice s <u>konstantními koeficienty</u>. Nejvyšší derivace je druhá, je to tedy <u>diferenciální rovnice druhého řádu</u>. Na pravé straně je funkce proměnné x. Proto říkáme, že jde o rovnici s <u>pravou stranou</u>. Lineární diferenciální rovnice přepisujeme tak, aby u nejvyšší derivace byl koeficient 1.

Rovnice b) a c) jsou lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty bez pravé strany (pravá strana je nula); přitom rovnici b) si představíme zapsanou ve tvaru

b) y' - 2y = 0

Připomenu rovnici c)

c) y" + 4y' + 3 = 0

Popíšeme si návod k řešení lineárních diferenciální rovnice <u>s konstantními koeficienty bez pravé strany</u>. Záleží na řešení algebraických rovnic tolikátého stupně, jaký je řád diferenciální rovnice. A protože s vyšším než druhým stupněm algebraických rovnic jsou problémy, omezíme se na rovnice 1. a 2. řádu.

Možná názornější bude vysvětlení na rovnici 2. řádu, tedy c).

K diferenciální rovnici přiřadíme algebraickou rovnici s neznámou λ (nazývá se charakteristickou rovnicí) podle pravidla: "Kolikátá derivace, tolikátá mocnina neznámé", v našem případě

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

Její řešení je $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$.

Je to ten nejpříjemnější případ, kdy rovnice má dva různé reálné kořeny. Jde o rovnici druhého řádu, v jejím obecném řešení se musejí vyskytovat dvě konstanty, které by se - pokud by byly zadány - určily z počátečních podmínek.

Obecné řešení v tomto případě je

$y = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_{12} x) = \boxed{C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}}$

Nenutím vás, abyste tomto návodu (této "kuchařce") věřili. Dosazením do původní rovnice si můžete udělat zkoušku, a pokud neuděláte chybu, tak návod přijmete.

V tomto příkladě zůstaneme u obecného řešení.

Pojďme teď k rovnici b) a přidejme počáteční podmínku $y(0) = 3$, bude jen jedna, jde o rovnici prvního řádu.

Diferenciální rovnice

$y' - 2y = 0$

Charakteristická algebraická rovnice

$\lambda - 2 = 0$

Její řešení: $\lambda = 2$

Obecné řešení diferenciální rovnice:

$\boxed{y = C\ e^{2x}}$

Použití počáteční podmínky:

$3 = C\ e^{0} = C$

Partikulární řešení vyhovující počáteční podmínce:

$\boxed{y = 3\ e^{2x}}$

Jak řešit lineární diferenciální rovnice druhého řádu, když jejich charakteristická rovnice má jeden (dvojnásobný) kořen nebo má imaginární kořeny, si ukážeme v dalším, asi už posledním textu.