

Vázané extrémů funkcí 2 proměnných

Začneme opět připomenutím toho, čím jsme posledně končili.

Další třídou úloh je hledání **vázaných extrémů**, kdy nás budou zajímat jen hodnoty funkcí pro ty dvojice $[x; y]$, které splňují určitou podmínku, tedy které jsou vázány na určitou množinu - vždy to bude množina uzavřená. Z hlediska dalších vlastností této množiny se zaměříme na tři typy těchto úloh:

- a) množina je jednorozměrná (křivka nebo přímka) a není omezená;
- b) množina je jednorozměrná a omezená - bude to uzavřená křivka (zpravidla kružnice nebo elipsa);
- c) množina je dvojrozměrná a omezená (zpravidla **kruh** [omlouvám se, v předchozím textu jsem asi omylem napsal **kružnice**] nebo elipsa spolu s jejími vnitřními body).

Kružnice je křivka, kruh plocha

V případě a) nejde o kompaktní množinu, neboť není omezená, tedy existence globálních extrémů není zaručená; hledáme lokální vázané extrémů. V případech b) a c) jde o kompaktní množiny - víme, že na nich maximum i minimum existuje; abychom vyjádřili, že extrémů jsou vztaženy k celé uvažované množině, používáme někdy přídavné jméno *globální*.

Posledně jsme se věnovali typu a).

b) Množina je jednorozměrná a omezená - bude to uzavřená křivka (zpravidla kružnice nebo elipsa). Křivka je uzavřenou množinou, a zde jde navíc o omezenou množinu, tedy vazbová podmínka určuje kompaktní množinu, na níž je existence extrémů zaručena.

Příklad

Máme najít vázané extrémů funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

na elipse (to je vazbová podmínka)

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

Můžeme použít metodu, s níž jsme se setkali v úloze typu a). Z vazbové podmínky vypočítáme $x^2 = 4 - 4y^2$, dosadíme do vyjádření funkce f , čímž získáme funkci jedné proměnné:

$$f_1(y) = 4 - 4y^2 + y^2 = 4 - 3y^2$$

a hledáme její extrémy, ale pozor: protože $x^2 = 4 - 4y^2$, musí být $4 - 4y^2 \geq 0$, tedy $y \in \{-1; 1\}$. Jde tedy o hledání extrémů funkce na uzavřeném intervalu, kdy kromě vnitřních bodů, v nichž je derivace rovna 0, musíme vyšetřit i krajní body. V našem případě $f_1(y) = 0$ pro $y = 0$, body, v nichž počítáme hodnotu funkce f_1 tedy jsou -1, 0 a 1.

Nesmíme na krajní body zapomenout. Horší by bylo tuto metodu použít, pokud by při naší vazbové podmínce ve vyšetřované funkci proměnné nevyskytovaly jen v sudých mocninách. Proto je tento typ úloh je mnohem vhodnější **metoda jakobiánu**.

Připomeňme si funkci, s níž pracujeme:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Přepišme si vazbovou podmínku ve tvaru

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

Podmínku jsme si zapsali ve tvaru funkce dvou proměnných (na sledované množině rovné nule).

f je naše funkce, g vyjadřuje vazbovou podmínku. Jsou to tedy docela různé věci. Nicméně v následujícím kroku budou mít podobné role. Sestavíme si **Jakobiho determinant** [nazývá se stručně **Jakobián**] (jeho prvky jsou funkce) **(a zase se omlouvám, že vynechám svislé čáry determinant označující)**

$$\begin{array}{cc} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{array}$$

Metoda jakobiánu záleží v tom, že v bodech, v nichž jsou vázané extrémy, je jakobián roven nule (může být roven nule i jindy, ale víme, že extrémy hledáme mezi body, v nichž je jakobián nulový). V našem případě:

$$\frac{\partial_x f}{\partial_x g} = \frac{\partial_y f}{\partial_y g} = \frac{2x}{2x} = \frac{2y}{8y} = 16xy - 4xy = 12xy = 0$$

Tedy v extrémech musí platit $12xy = 0$, tj. $xy = 0$.

To spolu s vazbovou podmínkou tvoří soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$xy = 0$$

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

U soustavy rovnic, kde jedna vyjadřuje, že nějaký součin je roven nule, bývá šikovné vyjít z toho, že aspoň jeden z činitelů musí být roven nule, tedy $x = 0$ nebo $y = 0$.

α) $x = 0$, pak protože $x^2 + 4y^2 = 4$, musí být $4y^2 = 4$, tedy $y^2 = 1$, což znamená $y = -1$ nebo $y = 1$.

Našli jsme dva podezřelé body:

$$P_1 = [0; -1], P_2 = [0; 1]$$

β) $y = 0$, pak protože $x^2 + 4y^2 = 4$, musí být $x^2 = 4$, tedy $x = -2$ nebo $x = 2$.

Našli jsme dva podezřelé body:

$$P_3 = [-2; 0], P_4 = [2; 0]$$

Ve všech podezřelých bodech vypočítáme hodnoty funkce f :

$$f(P_1) = f(P_2) = 1$$

$$f(P_3) = f(P_4) = 4$$

Mezi nimi vybereme největší a nejmenší. Vázané maximum funkce f tedy má hodnotu 4 a funkce je nabývá v bodech $[2; 0]$ a $[-2; 0]$, vázané minimum funkce f má hodnotu 1 a funkce je nabývá v bodech $[0; 1]$ a $[0; -1]$.

Metoda Jakobiánu se dá použít i na nekompaktní množiny, jenže nedává jednoduše odpověď na to, zda v daném bodě extrém je a o jaký extrém jde. U kompaktních množin víme, že mezi "podezřelými" body oba extrémy musejí být.

c) Množina je uzavřená plocha v rovině (např. kruh nebo elipsa včetně vnitřních bodů).

Jako příklad si uvedeme úlohu velice podobnou té předchozí.

Máme najít vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

na množině

$$x^2 + 4y^2 \leq 4$$

Je to elipsa včetně jejího vnitřku. Elipsa (křivka) je její hranicí, jde tedy o kompaktní množinu, funkce na ní nabývá jak maxima, tak minima. Najdeme zas "podezřelé body" a mezi nimi vybereme ty, v nichž funkce nabývá největší a nejmenší hodnotu. Podezřelé body mohou být na hranici nebo uvnitř. Na hranici je hledáme metodou jakobiánu, uvnitř by musely být zároveň lokálními extrémy, a tak najdeme lokální extrémy funkce (a mezi nimi vybereme ty, které splňují vazbovou podmínku) - a dostaneme další podezřelé body.

Pro naši úlohu podezřelé body na hranici známe z předchozího příkladu. Jsou to:

$$P_1 = [0; -1], P_2 = [0; 1], P_3 = [-2; 0], P_4 = [2; 0]$$

Zbývá hledat mezi vnitřními body:

$$\partial_x f = 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\partial_y f = 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Bod $[0; 0]$ splňuje vazbovou podmínku $x^2 + 4y^2 \leq 4$, a proto je dalším podezřelým bodem:

$$P_5 = [0; 0]$$

Funkční hodnoty v podezřelých bodech jsou:

$$f(P_1) = f(P_2) = 1$$

$$f(P_3) = f(P_4) = 4$$

$$f(P_5) = 0$$

Maximum funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na množině $x^2 + 4y^2 \leq 4$ tedy je 4 a nabývá ho v bodech P_3 a P_4 ; její minimum na této množině je 0 a nabývá ho v bodě P_5

Více méně jako závěrečnou poznámku uvedu ještě dvě úlohy, patřící k typu c)

1) Máme najít extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 3y$ na množině $x^2 + y^2 \leq 25$. Hledáme podezřelé body:

$\alpha)$ Na hranici $x^2 + y^2 = 25$

Jakobián:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 8y - 6x = 0$$

Podezřelé body musejí vyhovovat rovnicím

$$8y - 6x = 0 \Rightarrow y = (3/4) x$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

Dosazením za y do druhé rovnice najdeme podezřelé body $[4; 3]$ a $[-4; -3]$

$\beta)$ Uvnitř: Obě parciální derivace by se měla rovnat 0. Jenže ony obě jsou nenulovými konstantami: $\partial_x f = 4$, $\partial_y f = 3$. Ve vnitřku množiny tedy žádné extrémy nejsou, jedinými podezřelými body jsou $[4; 3]$ a $[-4; -3]$, v nichž funkce f nabývá hodnot po řadě 25 (vázané maximum) a -25 (vázané minimum)

Lineární funkce nabývá svých extrémů na kompaktní množině vždy na její hranici.

2) **Extrémy lineární funkce na mnohoúhelníku.** Uvažujme opět funkci $f(x, y) = 4x + 3y$ a hledejme teď její extrémy na čtyřúhelníku $[0, 0]$, $[7, 0]$, $[4, 4]$, $[0, 5]$. Hledáme-li extrémy lineární funkce na konvexní množině s lineárními omezujícími podmínkami, **stačí** vypočítat její hodnoty ve vrcholech. V rovině jde o mnohoúhelník a jeho vrcholy. V našem případě:

$f[0, 0] = 0$ Vázané minimum

$f[7, 0] = 28$ Vázané maximum

$f[4, 4] = 28$ Vázané maximum

$f[0, 5] = 15$ Zde není vázaný extrém

Hodnotu 28 funkce nabývá na celé straně čtyřúhelníka spojující body $[7, 0]$ a $[4, 4]$.

V praxi bývá počet proměnných i omezujících podmínek hodně vysoký (třeba trojciferný). Proto jsem sloveso "stačí" zvýraznil, projít vrcholy v takovém případě není nic jednoduchého; tuto úlohu řeší *lineární programování*.

Poslední týden se budeme věnovat diferenciálním rovnicím. Jako úvodní četbu vám nabízím své pohádky

[Hrnečku vař](#)

aneb separace proměnných v české pohádce

[Pohádkový les](#)

(Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s periodickým řešením)

[Rybníček Kaprníček](#)

Růst a jeho meze

<http://jirinecas.jetmouse.cz/Pohadky.htm>

S přáním hezkého prodlouženého víkendu

Jiří N.