

Lokální extrémy funkcí 2 proměnných

Zopakujme nejdříve závěr předchozího textu.

Jak tedy poznáme, že bod skutečně lokálním extrémem je? Pojmy rostoucí a klesající funkce pro 2 proměnné nemáme, vyšetřit funkci jen ve směru souřadnicových os nestačí (příklad s hubeným velbloudem). Pomůže nám **Hessova matice**, tj. matice druhých parciálních derivací.

Označme $\partial_{xx} f = \partial_x(\partial_x f)$; $\partial_{xy} f = \partial_y(\partial_x f)$ atd.

Hessova matice pro funkci f je matice (omlouvám se, že zas píšu matici bez závorek, při použití wordovského prostředku pro matice mi nejde psát indexy):

$$\begin{bmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{bmatrix}$$

Pro funkce g_3 a g_4 má Hessova matice tvar

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{pro } g_3,$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{pro } g_4$$

Matice jsou symetrické. Pro funkce, s nimiž se setkáváme, platí, že

$$\partial_{xy} = \partial_{yx}$$

Zde nám vyšly Hessovy matice obsahující jen čísla. V jiných případech se může stát, že jejich prvky jsou funkce. Necháme si to napříště; zatím jen prozradím, že *je-li determinant Hessovy matice kladný, je v daném bodě extrém, je-li záporný, tak tam extrém není, je-li nulový, tak nám tato metoda selhává, extrém tam být může, ale nemusí.* Mluvím-li o determinantu Hessovy matice, předpokládám, že jsme za proměnné (pokud se tam vyskytují) dosadili hodnoty pro příslušný bod - ukážeme si to na příkladě.

Hledejme lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 - 6xy + y^3.$$

Funkce je definována v celé množině $\mathcal{R}^2$, tedy pro všechny dvojice $[x, y]$ reálných čísel (a nadto má všechny potřebné parciální derivace).

Nutná podmínka pro to, aby v nějakém bodě byl lokální extrém, je, že obě parciální derivace tam musejí být rovný nule:

$$\partial_x f = 2x - 6y = 0$$

$$\partial_y f = -6x + 3y^2 = 0$$

Je to soustava dvou rovnic o dvou neznámých, ale pozor - druhá rovnice není lineární. Nemůžeme tedy použít žádnou z metod řešení soustav lineárních rovnic.

Vyjádříme z první rovnice x pomocí y a dosadíme do druhé rovnice (mohli bychom vyjádřit y pomocí x , kvůli druhé mocnině by to bylo početně o trochu náročnější).

Tedy

$$x = 3y \quad (\text{z první rovnice})$$

$$-6 \cdot 3y + 3y^2 = 0 \quad (\text{dosadil jsem do druhé rovnice})$$

Po úpravě:

$$3 \cdot y(-6 + y) = 0$$

Řešení jsou: $y_1 = 0$, $y_2 = 6$.

Protože $x = 3y$, odpovídající hodnoty x jsou:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 18.$$

Máme tedy dva podezřelé body (jinde než v nich lokální extrém nemůže být):

$$P_1 = [0; 0]$$

$$P_2 = [18; 3]$$

Jde o to, zda je tam extrém, a pokud ano, zda to je lokální maximum nebo lokální minimum.

Zda jde o extrém, nám odpoví determinant Hessiany matice, vypočítáme nejdříve tuto matici:

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$$

(zas nejsem s to ve Wordu udělat potřebné závorky, a tak aspoň matice odlišuji barevně)

Tato matice už není konstantní, v pravém dolním rohu je y .

Její determinant je $D = \det \mathbb{H} = 12y - 36$

Pro bod P_1 je $D(P_1) = 2 \cdot 6 \cdot 0 - 36 = -36 < 0$

Podle toho, co jsem zmínil v závěru předchozího textu a zde na začátku drobnějším písmem zopakoval, **v bodě P_1 není lokální extrém.**

Pro bod P_2 je $D(P_2) = 2 \cdot 6 \cdot 6 - 36 = 72 - 36 = 36 > 0$

Zas podle toho, co jsem zmínil v závěru předchozího textu a zde na začátku drobnějším písmem zopakoval, **v bodě P_2 je lokální extrém.**

A jaký?

Na to je jednoduchý návod. Ten se týká znaménka levého horního prvku v Hessianě matici. Je-li tento prvek **kladný** (u nás 2), jde o lokální **minimum**. Pokud by byl záporný, šlo by o lokální maximum.

A co když je nula? Není. Bavíme se o situaci, kdy $\det \mathbb{H} > 0$ (v bodě je lokální extrém). Matice $\mathbb{H}$ je symetrická, má tedy tvar $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$; $\det \mathbb{H} = ac - b^2 > 0$, a tedy

$ac > 0$; to znamená, že ani a , ani c není 0, a nadto mají stejné znaménko.

V našem příkladě je $a = 2$, a tedy v bodě P_2 je lokální minimum.

Doufám, že na tomto příkladě jsme si to nejdůležitější o hledání lokálních extrémů funkcí dvou proměnných ukázali.

Ještě to shrnu.

Hledáme lokální extrémy funkcí dvou proměnných (která má potřebné parciální derivace, ale to bývá v příkladech splněno):

1) Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému je, aby obě první parciální derivace byly rovny nule. Najdeme tedy body $[x; y]$, v nichž tomu tak je. Zpravidla to znamená vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která často není lineární.

2) Mezi těmito "podezřelými" body podle Hessiany matice vybereme ty, v nichž extrém skutečně je (kladný determinant) a rozhodneme, zda jde o LOKMAX (vlevo nahoře záporné číslo) či LOKMIN (vlevo nahoře kladné číslo).

A co když je determinant Hessiany matice roven 0? Tak tam může být leccos. Funkce $h_1(x, y) = x^4 + y^4$ a $h_2(x, y) = x^4 - y^4$ mají jediný podezřelý bod $[0; 0]$, obě v něm mají všechny druhé parciální derivace rovny 0, tedy determinant Hessiany matice je v něm roven nule; přitom h_1 zde má minimum [$h_1(0; 0) = 0$, všude jinde je $h_1(x, y) > 0$; $h_2(0; 0) = 0$, pro každé $x \neq 0$ je $h_2(x, 0) > 0$, pro každé $y \neq 0$ je $h_2(0, y) < 0$]. **Příklady, v nichž det H = 0, se (podle mé zkušenosti) v písemkách nevyskytují.**

Vázané extrémy funkcí 2 proměnných

Další třídou úloh je hledání **vázaných extrémů**, kdy nás budou zajímat jen hodnoty funkcí pro ty dvojice $[x; y]$, které splňují určitou podmínku, tedy které jsou vázány na určitou množinu - vždy to bude množina uzavřená. Z hlediska dalších vlastností této množiny se zaměříme na tři typy těchto úloh:

- a) množina je jednorozměrná (křivka nebo přímka) a není omezená;
- b) množina je jednorozměrná a omezená - bude to uzavřená křivka (zpravidla kružnice nebo elipsa);
- c) množina je dvojrozměrná a omezená (zpravidla kružnice nebo elipsa spolu s jejich vnitřními body).

V případě a) nejde o kompaktní množinu, neboť není omezená, tedy existence globálních extrémů není zaručená; hledáme lokální vázané extrémy. V případech b) a c) jde o kompaktní množiny - víme, že na nich maximum i minimum existuje; abychom vyjádřili, že extrémy jsou vztaženy k celé uvažované množině, používáme někdy přídavné jméno *globální*.

V tomto textu se budeme věnovat jen typu a), a to prostřednictvím příkladu. Typy b) a c) necháme do příštího textu.

Příklad:

Máme najít vázané lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x + 2y$$

na množině dvojic $[x; y]$ vyhovujících vazbové podmínce

$x - y^2 - 2 = 0$ (to je parabola - uzavřená, neomezená množina).

Zde se nabízí vazbovou podmínku přepsat ve tvaru

$$x = y^2 + 2$$

a za x dosadit do vyjádření funkce f ; tak dostaneme novou funkci f_1 , která je funkcí jedné proměnné, ale na "naší" množině vyjadřuje totéž, co f :

$$f_1(y) = (y^2 + 2) + 2y = y^2 + 2y + 2$$

Budeme vyšetřovat její (lokální) extrémy. Její derivace je

$$f_1'(y) = 2y + 2$$

Platí

$$f_1'(y) = 0 \text{ pro } y = -1,$$

$$f_1'(y) < 0 \text{ pro } y < -1,$$

$$f_1'(y) > 0 \text{ pro } y > -1$$

Funkce f_1 má v bodě $y = -1$ lokální minimum; jeho hodnota je $f_1(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 2 = 1$

Dosadíme do vazbové podmínky $x = y^2 + 2 = (-1)^2 + 2 = 3$.

Původní funkce $f(x, y)$ má tedy v bodě $[3; -1]$ **vázané lokální minimum**. Je to současně vázané (globální) minimum, protože funkce $f_1(y)$ zde skutečně minimum má; hodnoty funkce f_1 shora omezené nejsou, a tedy $f(x, y)$ maximum nemá. Pro kontrolu vypočítejme hodnotu $f(3; -1) = 3 - 2 = 1$ (je to o.k.; je to hodnota, již jsme vypočítali jako minimum funkce f_1).

Tedy funkce f na množině popsané uvedenou vazební podmínkou má lokální vázané minimum v bodě $[3; -1]$ a jeho hodnota je $f(3; -1) = 1$

Kdyby ve vazbové podmínce byly např. obě hodnoty v druhé mocnině, byl by výpočet obtížnější. Odmocninám je moudré se vyhýbat, pokud to jde. Ve zkouškové písemce, pokud mám zkušenost, se však takové nepříjemné příklady nevyskytují.