Ještě k otevřenosti a uzavřenosti množin:

Množina je otevřená, právě když k ní nepatří žádný její hraniční bod.

Množina je uzavřená, právě když k ní patří všechny její hraniční body.

Fialově zapsané tvrzení na konci předchozího textu mělo připomenout, že **tvrzení o všech bodech prázdné množiny je vždy pravdivé**.

Všichni občané ČR starší než 200 let jsou imunní vůči koronaviru.

Množina všech občanů ČR starších než 200 let je prázdná - výše napsané tvrzení je pravdivé

Víme, že vždy je pravdivé buď určité tvrzení, nebo jeho negace. Negací výše uvedeného tvrzení je:

Existuje aspoň jeden občan ČR starší 200 let, který není imunní vůči koronaviru.

Víme, že žádný takový občan neexistuje, tedy poslední tvrzení je nepravdivé.

Tedy: aby množina byla současně uzavřená i uzavřená, nesmí mít žádné hraniční body (množina jejích hraničních bodů musí být prázdná). V množině všech uspořádaných dvojic [x; y] reálných čísel (tuto množinu značíváme $\mathcal{R}$ x $\mathcal{R}$, případně $\mathcal{R}^2$) jsou dvě takové podmnožiny: prázdná množina ∅ a celá množina $\mathcal{R}^2$. S prázdnou množinou coby definičním oborem funkce se setkávat nebudeme, zato s funkcemi definovanými pro všechny dvojice reálných čísel, tedy na množině $\mathcal{R}^2$ se setkáme často. Množina všech dvojic reálných čísel je tedy uzavřená (je i otevřená), nicméně není omezená, a tedy není kompaktní (nemá tuto příjemnou vlastnost).

Důležitou třídou úloh je ***hledání extrémů*** (maxim, minim), a to ***jak lokálních, tak globálních***.

U jedné proměnné jsme k hledání lokálních extrémů použili derivaci. Jak tomu bude u funkcí dvou proměnných?

Představme si, že osa x je orientována ve východozápadním směru, osa y v severojižním. Když budete stoupat na vrchol hory, tak ať tam jdete v kterémkoli směru (a tedy i ve směru každé z obou os), bude tam (lokální) maximum výšky. Proto zavádíme pojem **parciální derivace** podle jedné z proměnných, kdy tu druhou (případně ty ostatní v případě více proměnných) považujeme za konstantu. Parciální derivaci funkce f podle proměnné x, resp. y značíme $\partial_x f$, resp. $\partial_y f$.

Jako příklad uveďme parciální derivace funkcí f_1 až f_3 z konce cv.11-1, a dále z těchto čtyř funkcí (ty jsou snazší, a tak je uvedu dřív):

$g_1(x, y) = x^2 + y^2$

$g_2(x, y) = x^2 - y^2$

$g_3(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$

$g_4(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$

$\partial_x g_1(x, y) = 2x$ $\partial_y g_1(x, y) = 2y$

$\partial_x g_2(x, y) = 2x$ $\partial_y g_2(x, y) = -2y$

$\partial_x g_3(x, y) = 2x - y$ $\partial_y g_3(x, y) = -x + 4y$

$\partial_x g_4(x, y) = 2x - 3y$ $\partial_y g_4(x, y) = -3x + 2y$

Omlouvám se, že k oddělování proměnných nedůsledně používám někdy čárku, někdy středník. Byl jsem vždy zvyklý na čárky, a teď se snažím v souvislosti s praxí v naší zemi (i v českém Excelu) přejít na středníky, a moc se mi to nedaří.

Připomínám

$f_3(x; y) = \ln x + \sqrt{y}$

$f_1(x; y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)} = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$

$f_2(x; y) = \ln (1 - x^2 - y^2)$

$\partial_x f_3 = 1/x$ $\partial_y f_3 = 1/(2\sqrt{y})$

$$\partial_x f_1 = \frac{-x}{(1 - x^2 - y^2)^{1/2}}$$

$$\partial_y f_1 = \frac{-y}{\quad}$$

$$(1 - x^2 - y^2)^{1/2}$$

$$\partial_x f_2 = \frac{-2x}{1 - x^2 - y^2}$$

$$\partial_y f_2 = \frac{-2y}{1 - x^2 - y^2}$$

Uvažujme nadmořskou výšku jako funkci zeměpisných souřadnic. Vrchol hory představuje lokální maximum výšky v každém směru, tedy i ve východozápadním, i v severojižním. Nutná podmínka pro existenci lokálního maxima je, aby v něm byly obě parciální derivace (přesněji: první parciální derivace) rovny nule (bavíme se jen o funkcích, které parciální derivace mají), neboť ve všech směrech je to maximum. Podobně je tomu při hledání lokálního minima. Pro ilustraci jsem zvolil dříve zmíněné funkce g_1 až g_4, v nichž se budeme zabývat hledáním lokálního minima.

Pro všechny tyto funkce platí, že jediným bodem, kde jsou obě parciální derivace rovny 0, je bod [0, 0]. Funkce g_1 tam má zřejmě lokální minimum, protože $g_1[0, 0] = 0$, $g_1[x, y] > 0$, jakmile aspoň jedna z proměnných je různá od nuly. Naproti tomu g_2 tam jasně lokální extrém nemá:
$g_2[0, 0] = 0$, $g_2[x, 0] > 0$ pro $x \neq 0$, $g_2[0, y] < 0$ pro $y \neq 0$.

Jak je tomu s funkcemi g_3 a g_4, není na první pohled vidět. Prozradím, že g_3 v bodě [0, 0] má lokální minimum, kdežto g_4 tam žádný lokální extrém nemá. Proč tomu tak je, si ještě dále naznačíme a zčásti si to necháme na příští týden.

Vraťme se k funkci g_2. To, že tam nemá extrém, bychom mohli odůvodnit tak, že ve směru osy x se funkce chová, jako by v [0, 0] měla lokální minimum, ve směru osy y jako lokální maximum.

Podobná situace může nastat v horském terénu. Představte si horský hřeben ve východozápadním směru a v něm sedlo, jímž je vedena silnice. Pro turistu jdoucího hřebenovou túru je v sedle lokální minimum nadmořské výšky, kdežto automobilista projíždějící sedlem tam zažívá její lokální maximum.

Představme si teď místo horského hřebene hřbet velbolouda (samozřejmě dvouhrbého, o jiných velbloudech se bavit nebudeme). Když ho naorientujeme hlavou k východu, bude pro sedlo mezi hrby situace stejná jako v předchozím příkladě s horským hřebenem - od hlavy k ocasu (teď ale vlastně nevím, zda má velbloud ocas, pokud ne, tak si jej můžeme na konci páteře domyslet) je v sedle minimum výšky, kolmo k páteři maximum.

A teď si představme, že ten velbloud je hodně hubený a hlavou ho naorientujeme k severovýchodu. Budeme-li ho hladit od severovýchodu k jihozápadu, bude mít v sedle lokální minimum výšky. Pokud ho budeme hladit od severu k jihu či od západu východu (tedy vůči páteři šikmo), budeme tam vnímat maximum výšky (musí být dostatečně hubený). Představa, že "bod podezřelý z lokálního extrému" tím extrémem skutečně je, pokud by byl stejným extrémem ve směru obou souřadnic, tedy selhává.

Jak tedy poznáme, že bod skutečně lokálním extrémem je? Pojmy rostoucí a klesající funkce pro 2 proměnné nemáme, vyšetřit funkci jen ve směru souřadnicových os nestačí. Pomůže nám **Hessova matice**, tj. matice druhých parciálních derivací.

Označme ∂_{xx} f = $\partial_x(\partial_x f)$; ∂_{xy} f = $\partial_y(\partial_x f)$ atd.

Hessova matice pro funkci f je matice (omlouvám se, že zas píšu matici bez závorek, při použití wordovského prostředku pro matice mi nejde psát indexy):

∂_{xx} f ∂_{xy} f
∂_{yx} f ∂_{yy} f

Pro funkce g_3 a g_4 má Hessova matice tvar

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ pro g_3,

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ pro g_4

Matice jsou symetrické. Pro funkce, s nimiž se setkáváme, platí, že

$\partial_{xy} = \partial_{yx}$

Zde nám vyšly Hessovy matice obsahující jen čísla. V jiných případech se může stát, že jejich prvky jsou funkce. Necháme si to napříště; zatím jen prozradím, že *je-li determinant Hessovy matice kladný, je v daném bodě extrém, je-li záporný, tak tam extrém není,* je-li nulový, tak nám tato metoda selhává, extrém tam být může, ale nemusí. Příjemnou skutečností je, že příklady, kde by v podezřelém bodě byl determinant Hessovy matice nulový, se ve zkouškových písemkách nevyskytují.