Funkce dvou proměnných

Příklady:

Objem V kužele je funkcí (1) jeho poloměru r a (2) výšky v:

$V = (1/3)\ \pi\ r^2\ v$

Cena z zboží je funkcí (1) poptávky x a (2) nabídky y:

$z = f(x, y)$

Takovéto označení budeme zpravidla používat.

U funkce jedné proměnné jsme měli možnost ji znázornit grafem v rovině: osa x pro proměnnou, osa y pro funkční hodnoty. U funkce dvou proměnných by to chtělo prostorový model: vodorovné osy x a y - proměnné, svislá osy z - funkční hodnota. Prostorové modely dělat nebudeme, ale můžeme se odvolávat na různé objekty, např. zemský povrch, popř. konkrétní předměty (asi použijeme jediný, a jím bude dvouhrbý velbloud [dvojhrbá ťava]).

Uvažujme ČR (bez staveb), funkcí bude nadmořská výška

globální maximum - vrchol Sněžky

lokální maxima - vrchol každé hory či kopce

globální minimum - Labe v Hřensku (aspoň doufám)

lokální minima - dna jezer, dno kráteru sopky, ...

Můžeme uvažovat i o funkcích více proměnných. S jejich "grafem" by to bylo ještě obtížnější, chtělo by to představu ve vícerozměrném prostoru (existují lidé, kteří ji mají, já mezi ně nepatřím). Mezi funkcemi jedné proměnné na jedné straně a funkcemi dvou a více proměnných na straně druhé je (aspoň) jeden důležitý rozdíl. Hodnoty jedné proměnné jsou uspořádány, víme, kdy $x_1 < x_2$; kdežto podobné uspořádání pro dvojice $[x; y]$ ani pro další n-tice $[x_1; x_2; ...; x_n]$ nemá smysl. U funkcí dvou a více proměnných proto nemluvíme o rostoucích či klesajících funkcích.

I u funkcí 2 proměnných nás zajímají definiční obory. Podívejme se nejdříve na funkci

$f_1(x, y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$.

Kvůli odmocnině musí být

$1 - x^2 - y^2 \geq 0$,

tedy

$x^2 + y^2 \leq 1$.

Kdybychom zde měli znaménko "=", šlo by o rovnici kružnice se středem v počátku a poloměrem 1. Nerovnosti

$x^2 + y^2 \leq 1$

vyhovují všechny body kruhu se středem v počátku a poloměrem 1, a to včetně hraniční kružnice (viz obr.1).

Obraťme teď pozornost k funkci

$f_2(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$.

Zde musí být

$1 - x^2 - y^2 > 0$,

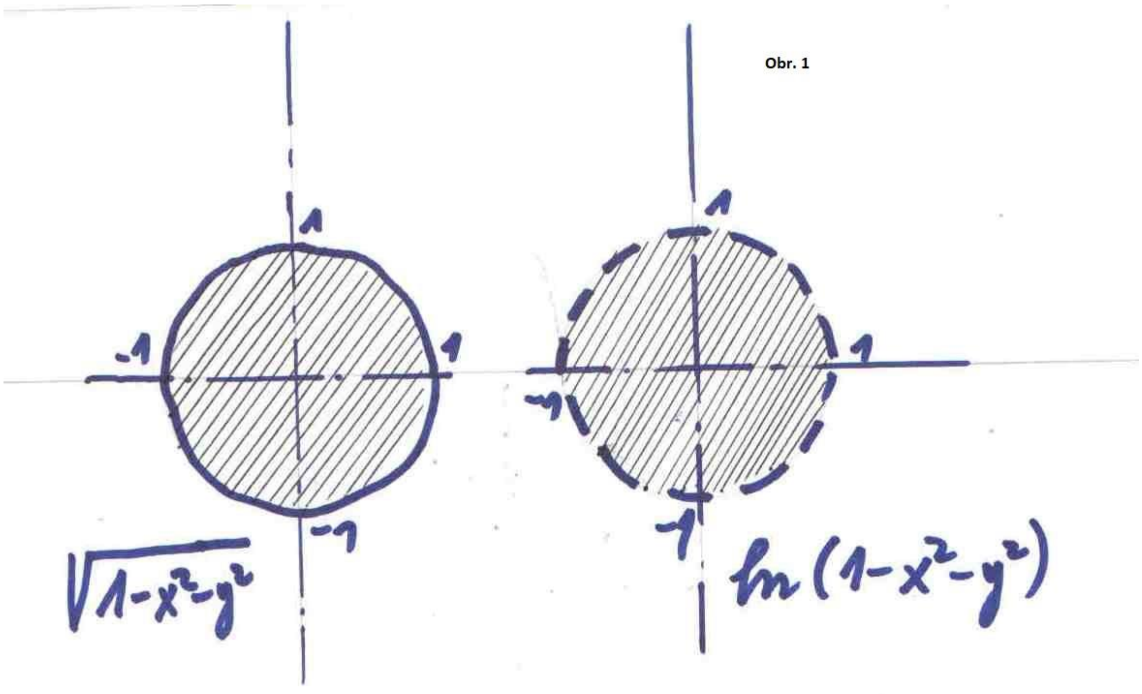
tedy

$x^2 + y^2 < 1$.

Oproti předešlému příkladu zde máme ostrou nerovnost; definičním oborem funkce f_2 je tedy jednotkový kruh se středem v počátku, ale tentokrát *bez hraniční kružnice*.

Definiční obory znázorňujeme graficky v rovině, hranici, která do definičního oboru patří, vytahujeme plně, pokud tam nepatří, tak čárkovaně.

Definiční obory funkcí f_1 a f_2 jsou na obr.1.



Definiční obor funkce dvou proměnných je množinou, na niž se můžeme dívat jako na podmnožinu roviny.

Množina se nazývá ***uzavřená***, právě když do ní patří všechny její hraniční body.

Množina se nazývá ***otevřená***, právě když do ní nepatří žádná její hraniční bod.

Intuitivně jasný je pojem omezené množiny: Množina se nazývá ***omezená***, právě když existuje takové číslo k, že vzdálenost libovolného jejího bodu od počátku je menší než k.

Definiční obor funkce $f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ je omezená uzavřená množina.

Definiční obor funkce $f_2(x, y) = \ln (1 - x^2 - y^2)$ je omezená otevřená množina.

Množina, která je zároveň omezená a uzavřená, se nazývá ***kompaktní***. *Spojitá funkce na kompaktní množině nabývá svého maxima i minima* (kompaktní množina je obdobou uzavřeného intervalu u funkcí jedné proměnné). To je moc příjemná vlastnost, je rozdíl hledat něco, o čem vím, že existuje, a hledat cosi, co nemusí existovat). A my budeme pracovat snad výhradně (nebo skoro výhradně) se spojitými funkcemi.

Definiční obor funkce $f_1(x, y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$ je tedy kompaktní množina.

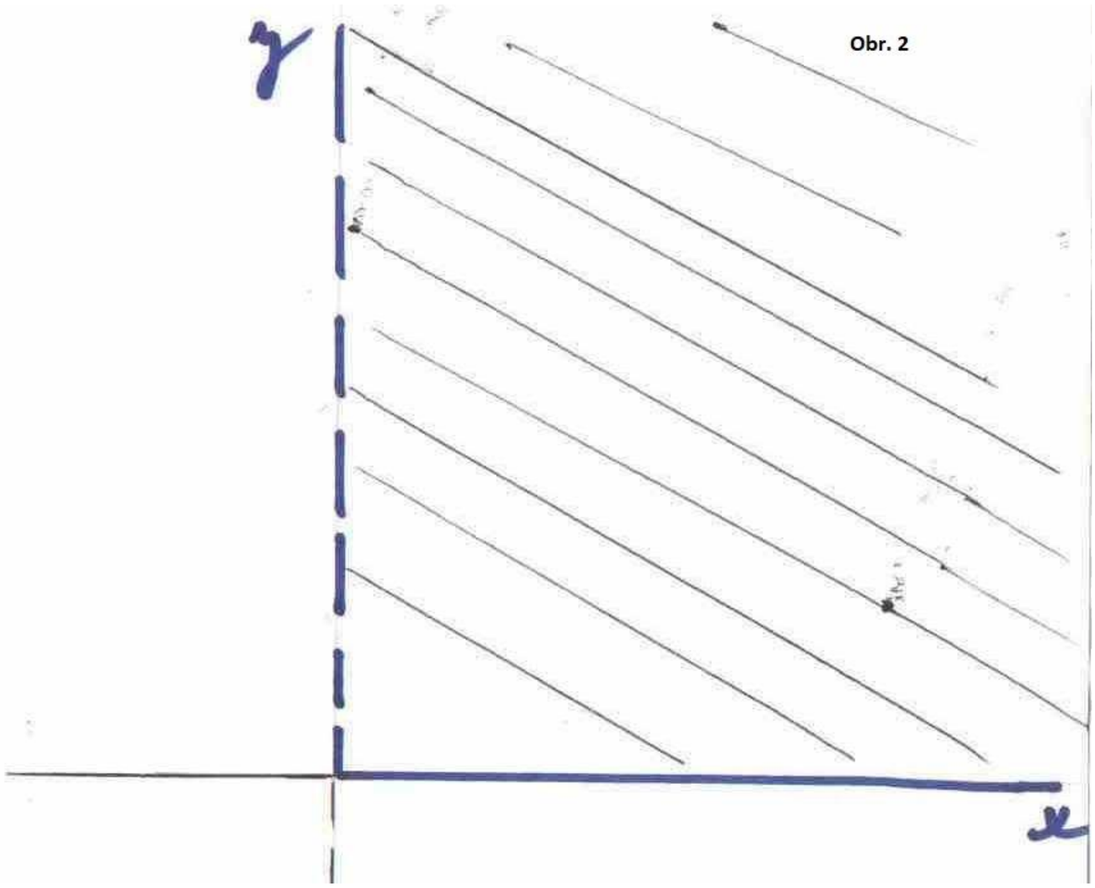
Obraťme svou pozornost ještě k funkci

$f_3(x, y) = \ln x + \sqrt{y}$.

Její definiční obor je dán podmínkami

$x > 0$, $y \geq 0$.

Je znázorněn na obr.2



Z obrázku je patrno, že není ani otevřenou množinou (hraniční body na ose x [tedy odpovídající podmínce $y = 0$] k ní patří), ani uzavřenou množinou (hraniční body na ose y [tedy odpovídající podmínce $x = 0$] k ní nepatří) a není to ani omezená množina (v prvním kvadrantu není vzdálenost od počátku omezena žádným číslem).

Naše znázorňování poněkud selhává, pokud jde o jednotlivé konkrétní body. Bod [0; 0] k definičnímu oboru funkce $f_3(x, y) = \ln x + \sqrt{y}$ nepatří (ln 0 není definován)

Definiční obor funkce f_3 není *ani otevřenou, ani uzavřenou* množinou.

Naskýtá se otázka, zda může být nějaká množina zároveň otevřená i uzavřená. Odpověď je kladná. Odůvodním ji příště. Ale byl bych raději, kdybyste k ní přišli sami. Třeba vám může pomoci, když najdete pravdivost tohoto tvrzení:

Všichni občané ČR starší než 200 let jsou imunní vůči koronaviru.

Víte, že vždy je pravdivé buď určité tvrzení, nebo jeho negace. Negace výše uvedeného tvrzení. Negací výše uvedeného tvrzení je:

Existuje aspoň jeden občan ČR starší 200 let, který není imunní vůči koronaviru.