# Nevlastní integrál

Počítejme určitý integrál

$\int_0^u e^{-x}\,dx$

Horní mez není konstanta, ale "parametr" u. Najít primitivní funkci je jednoduché:

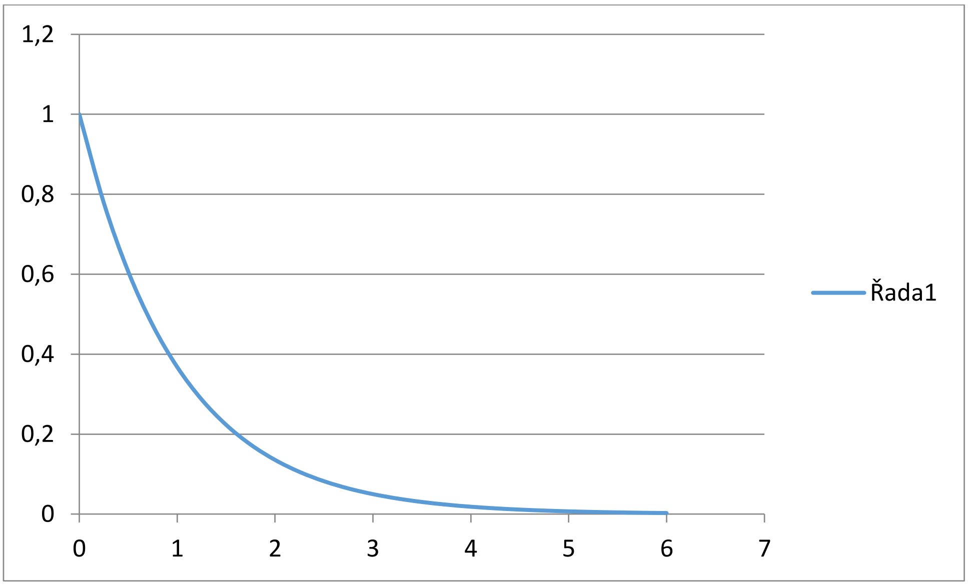
$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$.

Jak jsem už zmínil, když hledám primitivní funkci kvůli výpočtu určitého integrálu, nemusím se starat o přičítací konstantu c - jen by to znepřehledňovala.

Graf integrované funkce je na obr. 1. Funkce nikde není rovna 0, ale nule se natolik blíží, že mezera mezi grafem a osou x není patrná.

$\int_0^u e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^u = -e^{-u} - (-e^0) = -e^{-u} - (-1) = 1 - e^{-u}$

To je velikost plochy pod grafem od 0 do x=u




Obr. 1

**V obrázcích si nevšímejte popisu "Řady x" - to vnutil Excel**

$e^{-u}$ je klesající funkcí argumentu u, tedy čím je u větší, tím méně od jedničky odečítáme. Nechme u růst nade všechny meze; $u \to \infty$. To nás může inspirovat k definici ***nevlastního*** integrálu

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_0^u e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty} [-e^{-x}]_0^u =$$

$$[-e^{-x}]_0^\infty = \lim_{u\to\infty} (1 - e^{-u}) = 1$$

V zápisu $[\,]_a^b$ se běžně připouští meze dosazovat jako limitu

Plocha pod grafem klesající exponenciály se blíží k 1, pokud horní mez necháme se blížit k nekonečnu

Pro nevlastní integrál $\int_a^b$ (a může být $-\infty$, b může být $\infty$) stačí, když funkce je definovaná a spojitá na (a, b); pro krajní body použijeme limity. Nevlastní integrál je obecnější, než je dříve zavedený určitý integrál. Za chvíli si ukážeme, že nevlastní integrál může být užitečný, i když obě meze jsou reálná čísla (tedy ne nekonečno; v uvedených příkladech budou 0 a 1).

Teď však ještě počítejme:

$$\int_1^\infty (1/x)\,dx = [\ln x]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 0 =$$

$$= \infty - 0 = \infty$$

Nevlastní integrál je definován jako limita, a tedy může nabývat i hodnot $\pm\infty$.

Graf funkce 1/x je na obr. 2. Je vidět, že se hodnoty funkce blíží k 0 mnohem pomaleji než u klesající exponenciály na obr. 1.

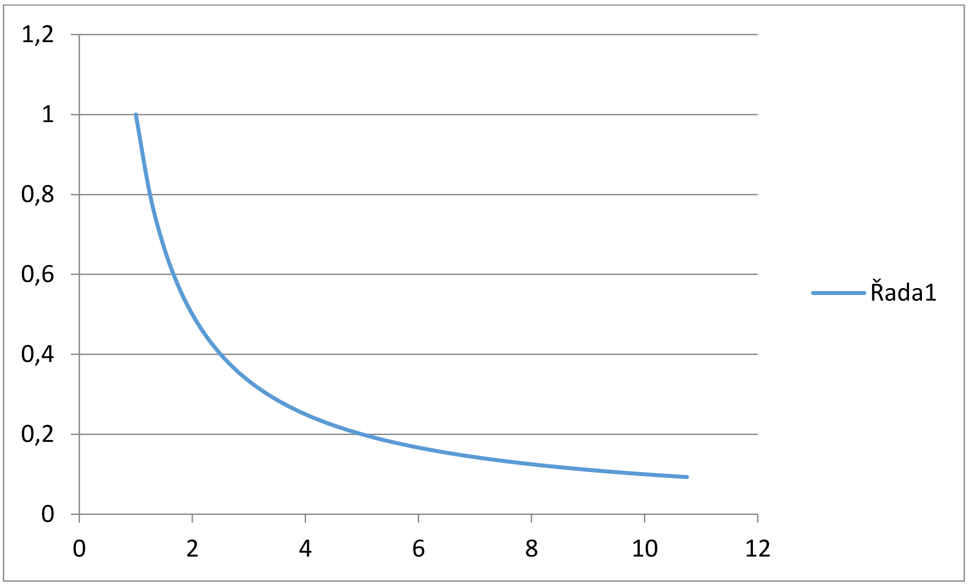
Počítejme ještě nevlastní integrály (meze jsou 0 a 1)

$$\int_0^1 (1/x)\,dx \quad \text{a} \quad \int_0^1 (1/\sqrt{x})\,dx$$

Ani jedna z integrovaných funkcí není pro x=0 definovaná

$$\int_0^1 (1/x)\,dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \lim_{x\to 0+} \ln x = 0 - (-\infty) = \infty$$

<u>Poznámka.</u> Zajímají nás jen x>0. Proto můžeme psát ln x a nemusíme tam uvádět absolutní hodnotu.

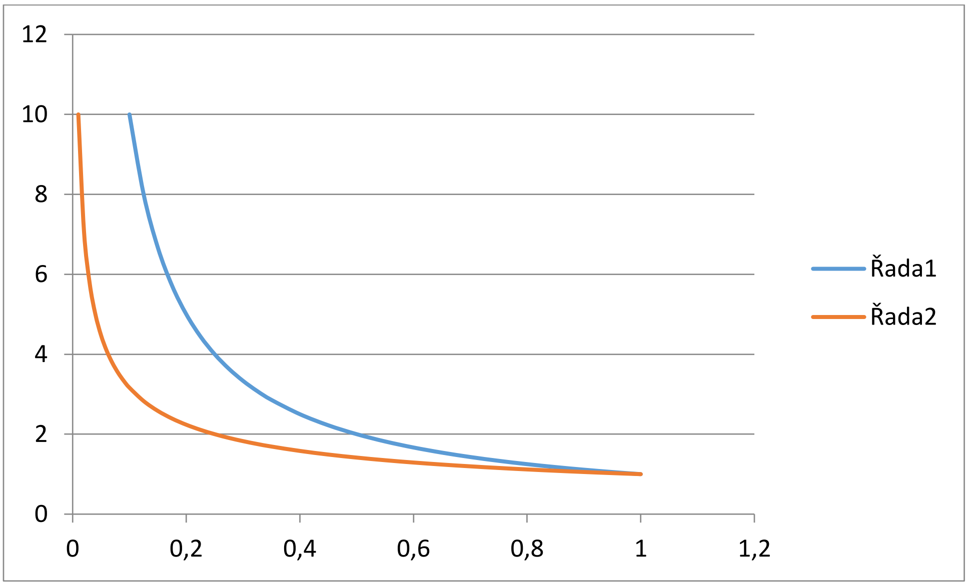



Obr. 2

$$\int_0^1 (1/\sqrt{x})\, dx = \int_0^1 x^{-1/2}\, dx = [(1/(1/2))\, x^{1/2}]_0^1 =$$

$$2\, [x^{1/2}]_0^1 = 2.(1-0) = 2$$

Zde jsme ani nemuseli počítat limitu, primitivní funkce je v 0 definovaná (a zprava spojitá).




Obr 3

Na obr. 3 jsou grafy funkcí 1/x (modře) a 1/√x (oranžově) znázorněny. Počítali jsme teď velikost plochy pod grafem na intervalu (0; 1). Obrázek odpovídá tomu, že (jdeme-li od 0) plocha pod oranžovou křivkou je konečná, kdežto pod červenou ne

Na závěr jeden nevlastní integrál z racionální funkce:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$$

Je-li x>0, jsou všechny členy ve jmenovateli kladné, tedy na integrovaném oboru není jmenovatel rovný 0, a tak má smysl integrál počítat.
Rozklad jmenovatele: $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$; i odtud vidíme, že nulové body jsou -1 a -2, tedy mimo interval integrace.

Vyjádření funkce jako součtu zlomků (postup jsem popsal již dříve):

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

Výpočet primitivní funkce:

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x+2| = \ln|(x+1)/x+2)|$$

Rozdíl logaritmů vyjadřuji jako logaritmus podílu, aby se mi pak dobře dovazovaly meze (hlavně ta horní, tedy ∞)

A tak

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = [\ln|(x+1)/x+2)|]_0^\infty = \ln 1 - \ln(1/2) = \ln 2$$

Červeně zapsaný menšenec jsem získal z toho, že

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)/x+2) = 1$$

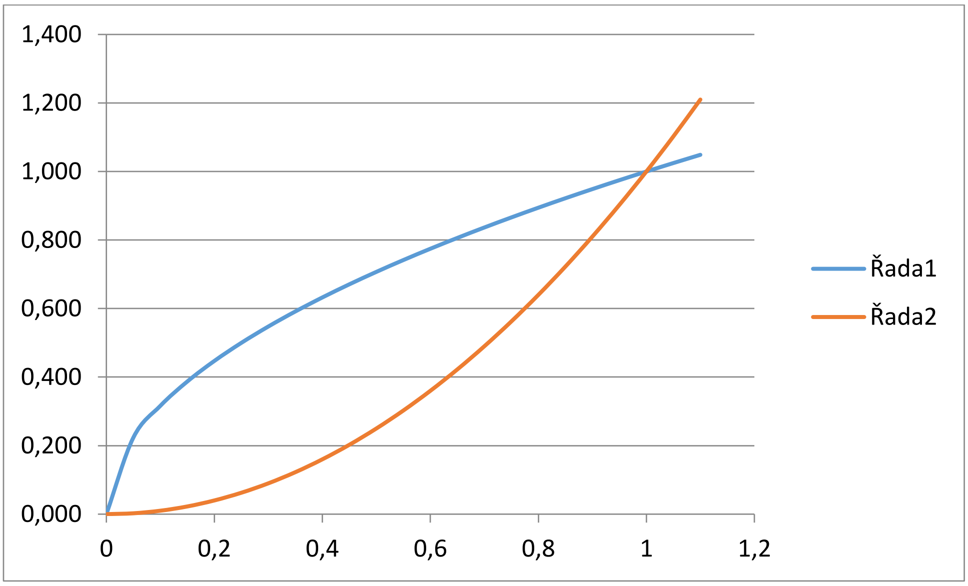
```
Poslední úprava: ln 1 = 0
ln (1/r) = - ln r, tedy ln (1/2) = - ln 2
```

*Dobrý pocit: Integrovaná funkce je na integračním oboru kladná, výsledek je kladný → důvod ke spokojenosti*

# Obsahy ploch

Skutečnosti, že integrál vyjadřuje velikost plochy pod grafem funkce můžeme využít i v obecněji formulovaných úlohách. Počítejme nyní velikost plochy mezi grafy funkcí f(x) $= x^2$ a g(x) $= \sqrt{x}$.

Nejdříve musíme najít průsečíky grafů, tedy řešit rovnici f(x) = g(x), v našem případě tedy $x^2 = \sqrt{x}$. Najdeme řešení $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Integrujeme rozdíl, přičemž menší hodnoty odčítáme od větších. Na intervalu ⟨0; 1⟩ je $x^2 \leq \sqrt{x}$ (viz obr. 4; $x^2$ je oranžově, $\sqrt{x}$ modře)




Obr. 4

Obsah plochy tedy bude roven integrálu

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\ dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2)\ dx = [(2/3)\ x^{3/2} - (1/3)\ x^3]_0^1 =$$

$$= 2/3 - 1/3 = \mathbf{1/3}$$

Meze 0 a 1 se velice pohodlně dosazují; pro všechna $r$ je $1^r = 1$; pro všechna kladná $r$ je $0^r = 0$.