

Integrovaní racionálních funkcí

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx$$

Nejdříve opakování z 9-2. Jde zde o podíl mnohočlenů (tedy o tzv. *racionální funkci*); v čitateli je lineární výraz nebo konstanta (tedy $a = 0$), ve jmenovateli mnohočlen stupně 2.

Metoda výpočtu záleží na tom, zda jmenovatel má 2, 1 nebo žádný reálný kořen.

a) Jeden reálný kořen - ukážu na příkladě:

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{x}{(x - 2)^2} dx =$$

$$= \int \frac{x - 2 + 2}{(x - 2)^2} dx = \int \frac{x - 2}{(x - 2)^2} dx + \int \frac{2}{(x - 2)^2} dx =$$

$$\int \frac{1}{x - 2} dx + \int \frac{2}{(x - 2)^2} dx = \ln |x - 2| - (x - 2)^{-1}$$

Modře vyznačená úprava se občas hodí: něco přičíst a totéž hned odečíst. Setkáme se s ní i v případě c), kdy jmenovatel nebude mít žádný reálný kořen. Integrály v posledním řádku se vypočítají pomocí triviální lineární substituce $y = x - 2$ ($dy = dx$)

Zde končí opakování

b) Dva různé reálné kořeny

Jmenovatel můžeme vyjádřit ve tvaru součinu, v němž x_1 a x_2 jsou jeho kořeny:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Zlomek

$$\frac{ax + b}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

lze vždy algebraickou úpravou převést na tvar

$$A/(x-x_1) + B/(x-x_2)$$

To už integrovat umíme.

Příklad:

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

Rozklad: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ Musíme najít A a B tak, aby platilo:

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 1)}$$

Obě strany rovnosti vynásobíme $x^2 - 1$, tedy $(x - 1)(x + 1)$; pravou stranu pak dále algebraicky upravím:

$$\begin{aligned} 2x &= A(x + 1) + B(x - 1) = \\ &= Ax + A + Bx - B = (A + B)x + (A - B) \end{aligned}$$

Tučně vyznačené výrazy si musejí být rovny pro každé x , tedy musejí být stejné koeficienty u x i absolutní členy:

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ A - B &= 0 \end{aligned}$$

Zpravidla v těchto úlohách získáme velice jednoduché soustavy lineárních rovnic; zde je $A = B = 1$ (řešení je jediné, matice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ je regulární).

Tedy:

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)} dx + \int \frac{1}{(x+1)} dx =$$

$$\ln |x - 1| + \ln |x + 1| + C = \ln |(x-1)(x+1)| + C$$

Poslední úprava není nutná, bývá ovšem velice užitečná, když se logaritmy odčítají a lze je převést na logaritmus podílu. K tomu se vrátíme u určitých integrálů.

c) Žádný reálný kořen

c1) V čitateli je konstanta

Ve výsledku bude funkce arkustangens. Konec konců, speciálním případem zde je integrace funkce $1/(1 + x^2)$, jejíž primitivní funkce je přímo arkustangens (plus konstanta). Postup ukážu na příkladě:

$$\int \frac{2}{x^2 - 6x + 13} dx$$

Jmenovatel nemá žádný reálný kořen. Takový jmenovatel můžeme vždy vyjádřit ve tvaru $(x - a)^2 + b^2$. Běžně a a b nemusejí být celá čísla, b dokonce může mít tvar odmocniny. Volím příklad, aby vycházel příjemně. Jmenovatel je

$$x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4 = (x - 3)^2 + 2^2$$

Takto upravený jmenovatel použiji a udělám substituci

$$x - 3 = u$$

$$dx = du$$

Pro novou proměnnou jsem použil u , s jedním symbolem bychom stejně nevystačili, budeme substituovat dvakrát.

$$\int \frac{2}{(x-3)^2 + 2^2} dx = \int \frac{2}{u^2 + 2^2} du = \frac{2}{2^2} \int \frac{1}{(u/2)^2 + 1} du = \mathbf{A}$$

Poslední úprava je čistě algebraická; z čitatele jsem před integrál vytknul 2, ze jmenovatele $2^2 = 4$, aby jmenovatel integrovaného výrazu měl tvar "něco na druhou" + 1, a tak se co nejvíce přiblížil vzorci, který má ve výsledku arkustangens. Teď dále udělám substituci (zase lineární)

$$u/2 = t, \quad (1/2)du = dt$$

Výraz **A** přepíšu tak, že koeficient před integrálem zkrátím a pak udělám substituci, po níž budou následovat zpětné substitute

$$\mathbf{A} = (1/2) \int \frac{1}{(u/2)^2 + 1} du = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg} (u/2) + c = \operatorname{arctg} ((x-3)/2) + c$$

Závěr:

$$\int \frac{2}{x^2 - 6x + 13} dx = \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + c$$

c2) V čitateli je lineární funkce proměnné x

Nejpříjemnější je, když je v čitateli derivace jmenovatele (nebo její násobek).
Kdybychom měli počítat

$$\int \frac{x-3}{x^2 - 6x + 13} dx$$

využili bychom toho, že derivace jmenovatele je $2x-6 =$

$2(x - 3)$ a za jmenovatel bychom substituovali:

$$y = x^2 - 6x + 13, \quad dy = 2(x - 3) dx.$$

Pokud takové štěstí nemáme, musíme počítat ve dvou krocích.

Počítejme tedy neurčitý integrál

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 6x + 13} dx$$

Když už od x odečítáme jen 1, ač by se nám hodila 3 (viz výše), tak si pomůžeme odečtením a přičtením; náš integrál vyjádříme ve tvaru

$$\int \frac{x - 3 + 2}{x^2 - 6x + 13} dx$$

Ten jej rozdělíme na součet dvou integrálů:

$$\int \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 13} dx + \int \frac{2}{x^2 - 6x + 13} dx$$

První sčítanec označím I_1 , druhý I_2

Z oddílu c1) víme, že

$$I_2 = \operatorname{arctg} \frac{x - 3}{2}$$

U dílčích výpočtů konstantu c nepíšu, ve výsledku na ni nesmím zapomenout

Vypočítám I_1 , přičemž využiji to, čím jsem oddíl c2 začal.

Použijí tedy substituci $y = x^2 - 6x + 13$, $dy = 2x - 6 dx$.

$$I_1 = \int \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 13} dx = (1/2) \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 13} dx =$$

$$= (1/2) \int (1/y) dy = (1/2) \ln |y| =$$

$$= (1/2) \ln (x^2 - 6x + 13) = \ln \sqrt{(x^2 - 6x + 13)}$$

U logaritmu nemusím psát absolutní hodnotu, protože nerozložitelný kvadratický trojčlen nemění znaménko a ten náš je očividně kladný (stačí dosadit $x = 0$). Vyjádření s odmocninou (využívající toho, že $\ln a^r = r \ln a$) je někdy užitečné, ale není nutné (a nedobře se z něj vychází, když se dělá zkouška, derivovat odmocninu není příjemné)

Vypočítali jsme:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 6x + 13} dx =$$

$$= (1/2) \ln (x^2 - 6x + 13) + \operatorname{arctg} ((x-3)/2) + c$$

Určitý integrál

Je to úplně něco jiného než neurčitý integrál:

Neurčitý integrál je *množina funkcí lišících se o konstantu*.

Určitý integrál je *číslo*

Rozdíl je věcný. K výpočtu určitého integrálu potřebujeme znát primitivní funkci.

Nejzákladnější využití integrálu je k výpočtu plochy. Na obrázku je graf funkce sinus na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$. Máme vypočítat obsah plochy mezi sinusoidou (na tomto intervalu) a osou x . Nenechte se mást nestejným měřítkem na obrázku, to mi vnutil Excel (vím, že by se dalo změnit, ale myslím, že to nestojí za to). Nabízí se možnost plochu si rozdělit na spoustu hodně hubených svislých proužků, výška každého by byla $\sin x$. Tu malinkou šířku proužku v dobách vznikající matematické analýzy označili dx . Plocha takového proužku u bodu x na x -ové ose je $\sin x \, dx$.

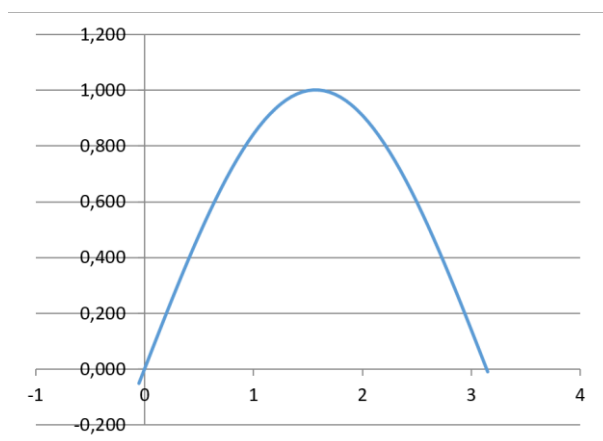
Abychom určili celou hledanou plochu, musíme velikosti těchto hubenoučkových (infinitesimálních) plošek sečíst. Součet se latinsky řekne suma, začíná také S . Nabízí se označení

$$S_{0^{\pi}} \sin x \, dx$$

Písmenko S časem trochu změnilo tvar a píše se

$$\int_{0^{\pi}} \sin x \, dx$$

Hledaná plocha je rovna **určitému integrálu od 0 do π z dané funkce**. **Znázorňuje ji dále uvedený obrázek (plocha mezi osou x a grafem funkce); pozor však, že na obrázku měřítka ve směru osy x a ve směru osy y se liší.**



Jak to však souvisí s primitivní funkcí? Určitý integrál vypočítáme tak, že vezmeme hodnotu primitivní funkce v horní mezi a od ní odečteme její hodnotu v dolní mezi.

Je-li F primitivní funkce k f , pak
 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Zkráceně to zapisujeme $[F(x)]_a^b$

Primitivních funkcí sice existuje nekonečně mnoho, důležité je, abychom pro výpočet vybrali jednu konkrétní. Znamená to, že když počítáme určitý integrál, při výpočtu primitivní funkce nemusíme pracovat s konstantou c .

Vraťme se k naší ploše pod sinusovkou. Primitivní funkce k $\sin x$ je $-\cos x$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x dx &= [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = \\ &= -(-1) - (-1) = 2 \end{aligned}$$

Tak jsme vypočítali plochu pod sinusovkou.
 A z tohoto příkladu vidíme, že někdy je třeba hodně opatrně zacházet se znaménky.

Když počítáme určitý integrál, započítává se plocha nad osou x s kladným znaménkem, kdežto plocha pod ní se znaménkem záporným. Na intervalu $(\pi; 2\pi)$ je funkce sinus nekladná (kromě krajních bodů záporná; můžete si ověřit výpočtem, že

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x dx = -2 \qquad \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

Pozor: Když počítáme integrál

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

potřebujeme, aby funkce f byla na (a, b) definovaná a spojitá.

Příklad

Máme vypočítat integrál

$$\int_{-1}^4 \frac{1}{(4 - x^2)} dx$$

Funkce $1/(4 - x^2)$ má definiční obor $\mathcal{R} - \{-2; 2\}$. Protože

$2 \in (-1; 4)$ (tedy funkce není definovaná pro 2, která leží v integračním oboru), integrál neexistuje.

Příklad

Máme vypočítat integrál

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4 - x^2} dx$$

Změnili jsme (oproti předchozímu příkladu) horní mez; na intervalu $(-1; 1)$ je funkce $1/(4 - x^2)$ definovaná a spojitá, tedy integrál existuje.

Abychom jej vypočítali, najdeme nejdříve primitivní funkci

$$\int \frac{1}{4 - x^2} dx$$

(je jich sice nekonečně mnoho, nám však teď stačí jedna z nich, konstantu c tedy nemusíme psát).

Integrovanou funkci rozložíme na součet "parciálních zlomků", přičemž víme, že $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$; tedy budeme hledat vyjádření:

$$\frac{1}{4 - x^2} = \frac{A}{2 - x} + \frac{B}{2 + x}$$

Po vynásobení obou stran rovnosti výrazem $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$ a dalších algebraických úpravách pravé strany dostaneme:

$$1 = A(2 + x) + B(2 - x) = 2A + 2B + Ax - Bx = x(A - B) + 2A + 2B$$

Na levé straně se x nevyskytuje, koeficient u x musí být tedy 0, tj. $A - B = 0$. Absolutní člen na levé straně je 1, musí tedy být $2A + 2B = 1$. Řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} A - B &= 0 \\ 2A + 2B &= 1 \end{aligned}$$

je

$$A = B = 1/4$$

Tedy:

$$\int \frac{1}{4 - x^2} = (1/4) \int \left[\frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x} \right] dx =$$

$$= (1/4)[- \ln |2 - x| + \ln |2 + x|] = \ln |(2 + x)/(2 - x)|$$

Při počítání integrálu ze **zeleně vyznačeného zlomku** byla použita substituce $y = 2 - x$, tedy $dy = -dx$, proto se pak před primitivní funkcí objevilo znaménko minus. Modře zapsaný tvar je šikovný pro dosazování mezí určitého integrálu, a tak ten teď použijeme.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(4 - x^2)} dx = [\ln |(2 + x)/(2 - x)|]_{-1}^1 =$$

$$\ln (3/1) - \ln (1/3) = \ln (3) - \ln (1/3) = \ln (3) + \ln (3) =$$

$$2 \cdot \ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9$$

V úpravách využívám pravidla pro úpravy mocnin.

Na intervalu $\langle -1; 1 \rangle$ je integrovaná funkce kladná. A integrál nám vyšel kladný (kdyby vyšel záporný, svědčilo by to o chybě ve výpočtu).

Pro dnešek to stačí. Stránek je moc, té látky zas tolik není, byl jsem upsanější (řekl bych "upovídanější", nicméně píšu a nepovídám).