Pokračování o substituční metodě

Velice jednoduše můžeme obrátit pravidlo o derivování složené funkce, kde vnitřní funkce je lineární.

Počítejme

$I = \int [1/(2x + 3)]\, dx$

Zlomek si můžete (v mysli nebo na papíře) převést na vyjádření s vodorovnou zlomkovou čárou.

Víme, že $\int (1/y)\, dy = \ln |y| + c$

V našem příkladu místo pouhé proměnné tam máme její lineární funkci; substituujme

$y = 2x + 3$

$dy = 2\, dx$ (derivace vnitřní funkce je 2); s dvojkou (násobicí konstantou) su jednoduše poradíme.

$I = \int [1/(2x + 3)]\, dx = (1/2) \int [2/(2x + 3)]\, dx = (1/2) \int [1/y]\, dy = (1/2) \ln |y| + c =$

$= (1/2) \ln |2x + 3| + c$

Obdobně je tomu vždy, když máme v argumentu funkce, jejíž integrál známe, lineární funkci, tedy např.

$\int \cos (4x + 1)\, dx = (1/4) \sin (4x + 1) + C$

$\int e^{x/2}\, dx = 2\, e^{x/2} + C$

$\int \sin 2x\, dx = -(1/2) \cos 2x + C_1$

Přičítací konstantu jsem v posledním z integrálů označil C_1, za chvíli ukážu, proč.

Jistě znáte goniometrické identity

$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Pojďme poslední z počítaných integrálů počítat jinak než přech chvílí; použijeme první z výše uvedených identit:

$\int \sin 2x \, dx = 2 \int \sin x \cdot \cos x \, dx = 2 \int y \, dy = 2 \, y^2/2 + C_2 =$

[Používám substituci sin x = y, cosx dx = dy]

$= y^2 + C_2 = \sin^2 x + C_2$

Takže jsme teď vypočítali

$\int \sin 2x \, dx = \sin^2 x + C_2$

Na předchozí stránce jsme měli

$\int \sin 2x \, dx = -(1/2) \cos 2x + C_1$

Rozhodně **nemůže platit** $\sin^2 x = -(1/2) \cos 2x$, abychom to ukázali, stačí dosadit $x = 0$; $0 \neq -(1/2).1$

Počítejme však rozdíl těchto funkcí (použiji při tom druhou z uvedených goniometrických identit a známý vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$):

$\sin^2 x - [-(1/2) \cos 2x] = \sin^2 x - [-(1/2) (\cos^2 x - \sin^2 x)] =$

$= \sin^2 x - [(1/2) (-\cos^2 x + \sin^2 x)] = (1/2) (\sin^2 x + \cos^2 x) =$

$= 1/2$

Jinak řečeno, funkce $\sin^2 x$ a $-(1/2) \cos 2x$ jsou sice různé, ale rozdíl mezi nimi je konstantní (na první pohled to nevidíme, ale to je u goniometrických výrazů běžné).

Různými metodami jsme se dostali k různým primitivním funkcím, nicméně lišícím se o konstantu. Proto je dobré u počítání primitivních funkcí konstantu ve výsledku nezapomenout psát.

A teď konečně slíbený příklad, kde se použije per partes i substituce:

Máme vypočítat $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

Připomínám, že derivace funkcí ln, arctg, arcsin (a také arccotg a arccos) jsou vyjádřeny algebraickým výrazem. K jejich integraci se využívá metoda per partes, přičemž příslušnou funkci si vyjádříme jako její součin s jedničkou.

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int 1.\operatorname{arctg} x \, dx = x.\operatorname{arctg} x - \int x.1/(1 + x^2) \, dx$$

$g'=1 \quad f=\operatorname{arctg} x$

$g=x \quad f'=1/(1 + x^2)$

Teď se vyplatí udělat pomocný výpočet a vypočítat červeně naznačený integrál

$$\int \frac{x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy =$$

$$= (1/2) \ln |y| = (1/2) \ln (1 + x^2)$$

Použitá substituce: $y = 1 + x^2$, $dy = 2x \, dx$

Poznámky: (a) Ve vyjádření $\ln (1 + x^2)$ nepoužívám absolutní hodnotu, bylo by to zbytečné, protože vždy platí, že $1 + x^2 > 0$.
(b) V *pomocném výpočtu* nepovažuji za nutné psát přičítací konstantu c.

Vraťme se k původnímu integrálu:

$\int$ arctg x dx = x.arctg x - **$\int$ x.1/(1 + x^2) dx** =
= x.arctg x - (1/2) ln (1 + x^2) + C

Zde už **na aditivní konstantu C nesmím zapomenout.**

Doporučuji udělat si zkoušku zderivováním.

Obecné pravidlo, jak počítat integrály, není. Bývá dobré vědět, jak jít na některé typy úloh, jak je převést na úlohy známé. Několik málo takových návodů teď uvedu

$\int \sin^2 x\, dx$, $\int \cos^2 x\; dx$

Použijeme identity (čili "vzorečky")

$\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$

Tím se zbavíme druhé mocniny

$\int \mathrm{tg}\, x\, dx$

Použijeme vyjádření tg x = sin x/cos x; v čitateli je (až na znaménko) derivace jmenovatele, použijeme tedy substituci cos x = y, a tedy -sin x dx = dy

==

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + pq + q}\, dx$$

Jde o podíl mnohočlenů (tedy o tzv. *racionální funkci*); v čitateli je lineární výraz nebo konstanta (tedy *a* = 0), ve jmenovateli mnohočlen stupně 2.

Metoda výpočtu záleží na tom, zda jmenovatel má 2, 1 nebo žádný reálný kořen.

a) Jeden reálný kořen - ukážu na příkladě:

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4}\,dx = \int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{x - 2 + 2}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{x-2}{(x-2)^2}\,dx + \int \frac{2}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| - (x-2)^{-1}$$

Modře vyznačená úprava se občas hodí: něco přičíst a totéž hned odečíst. Setkáme se s ní i v případě c), kdy jmenovatel nebude mít žádný reálný kořen. Integrály v posledním řádku se vypočítají pomocí triviální lineární substituce y = x - 2 (dy = dx)

Případy, kdy jmenovatel má dva různé reálné kořeny a kdy nemá žádný reálný kořen, nechám na příští týden (cv. 10).