Začínáme s integrály

Věnovali jsme se derivacím. Šlo o to k dané funkci F(x) (teď se mi hodí použít velké F) najít její derivaci F'(x):

Původní (primitivní) funkce **F(x)** → Její derivace **F'(x) = f(x)**

Nabízí se otázka, zda to jde i obráceně: ***K dané funkci f(x) najít takovou funkci F(x), aby platilo F'(x) = f(x).***

Odpověď je: někdy ano, někdy ne.

Ale jasné je, že pokud to jde, tak úloha není jednoznačná; víme, že když se dvě funkce liší o konstantu, mají stejnou derivaci. Derivovat znamená doslova něco jako odvozovat, když funkce f je derivací, funkci F takovou, že F' = f, nazveme funkcí k ní *primitivní.* Zkrátka, berme ten termín tak, jak je zaveden.

Opačný postup k derivování nazýváme *integrováním*, píšeme

$F(x) = \int f(x)\, dx$

Jak tento symbol vznikl, bych rád zmínil příští týden.

Určitým, na štěstí dost neškodným problémem je, že ∫ f(x) dx neoznačuje jednu funkci, ale nekonečně mnoho funkcí, které se liší o konstantu.

Víme, že (sin x)' = cos x

Pak ∫ cos x dx = sin x + c, kde c je libovolná reálná konstanta (samozřejmě, že to může být i 0).

Funkce sin x, sin x + 2, sin x - π , atd. – to jsou různé primitivní funkce k funkci cos x.

Neurčitým integrálem z dané funkce rozumíme množinu všech primitivní funkcí k ní. Termíny primitivní funkce a neurčitý integrál se někdy zaměňují, což ovšem k žádným nepříjemným nedorozuměním nevede. Při počítání neurčitých integrálů (primitivních funkcí) nezapomínejte ve výsledku ono "+ c" uvádět (c je tzv, aditivní [přičítací] konstanta).

Hledání primitivních funkcí, jinými slovy neurčitých integrálů, nemusí být jednoduchou záležitostí (u zkoušek se však dávávají celkem hodně jednoduché příklady). Derivace v bodě je definována jako limita, díky tomu jsme odvodili vzorce pro derivování, takže umíme celkem bez přemýšlení vypočítat derivaci z libovolné elementární funkce (tj. funkce zadané obvyklým předpisem). Pojetí derivace jako limity se pro integrování obrátit nedá, při výpočtu primitivních funkcí jsme odkázáni na určité "obrácení" vzorců pro derivování.

Příjemné na integrování je, že lze udělat zkoušu derivováním.

Kvůli omezeným možnostem Wordu i svých budu někdy ;místo e^y psát exp y.

Snadno vypočítáme derivaci $(\exp x^2)' = \exp x^2.2x = 2x \exp x^2$. Tedy

$\int 2x \exp x^2 = \exp x^2 + C$

Jak na to přijít, aniž bychom primitivní funkci předem znali, si ukážeme. Základní myšlenka je, že to, co je červeně, je derivací toho, co je zeleně. Mohu vám teď napsat zdánlivě jednodušší příklad:

$\int \exp x^2$

Zde by žádné obracení pravidel pro derivování nepomohlo. Primitivní funkci k $\exp x^2$ nelze pomocí elementárních funkcí vyjádřit. To je dobré vědět, už pro případ, že by vás napadlo si příklady na integrování vymýšlet. Pokud jde o zkoušku, nemějte obavy, tam takové záludnosti nejsou.

Základní vzorce v kap. 5.1 je nutno se naučit zpaměti (jsou to v podstatě obrácené vzorce pro derivace). Vzorec 2 je speciální případem vzorce 3. Ve vzorci 3 se vylučuje případ $\alpha = -1$; ten je obsahem vzorce 4.

Podobně jako tomu bylo i derivace, je i integrace lineární operací: Integrál součtu funkcí je součtem jejich integrálů, obdobně je tomu pro násobek funkce číslem.

Od pravidla o derivaci součinu je odvozena metoda integrace ***per partes***. V učebnici je jí věnováno poměrně hodně, a tak se k ní vrátím později u příkladu, v němž použiji jak ji, tak asi daleko silnější, širší použití mající ***substituční metodu***, odvozenou od pravidla pro derivování složené funkce.

Podstatu substituční metody jsem už naznačil v souvislosti s primitivní funkcí k funkci $2x.\exp x^2$

Ukažme si ještě další příklady. Nejdříve hledejme primitivní funkci k funkci $x.\sqrt{(1 + x^2)}$, jinak řečeno, počítejme neurčitý integrál (symbol I zde nemá žádný hlubší smysl, je jen proto, abych se mohl na výraz odvolávat)

$I = \int x.\sqrt{(1 + x^2)}\, dx$

Při substituční metodě se snažíme v integrovaném výrazu najít "podvýraz", jehož derivace se tam také vyskytuje. Ze zkušenosti víme, že s odmocninami bývají potíže. V našem případě máme odmocninu z $(1 + x^2)$. Víme, že $(1 + x^2)' = 2x$. V našem integrovaném výrazu sice nemáme 2x, ale je tam x. Výraz pro I můžeme přepsat:

$$I = (1/2) \int 2x.\sqrt{(1 + x^2)}\, dx,$$

Tohle je velice častý obrat: integrovaný výraz nějakým číslem vynásobíme, aby se integrál dobře počítal, a výsledek jím vydělíme

Formálně postupujeme takto:

Za červeně napsaný podvýraz substituujeme:

$$1 + x^2 = y$$

Substituovaný podvýraz zderivujeme a připíšeme k němu dx; tento výraz položíme rovným dy: V integrovaném výrazu nahradíme část s proměnnou x odpovídajícími s proměnnou y:

$$2x\, dx = dy$$

$$I = (1/2) \int 2x.\sqrt{(1 + x^2)}\, dx = (1/2) \int \sqrt{(1 + x^2)}\, 2x\, dx = (1/2) \int \sqrt{y}\, dy =$$

$$= (1/2) \int y^{1/2}\, dy = (1/2) . y^{3/2}/(3/2) + c = (1/3)\; y^{3/2} + c =$$

$$= (1/3)(1 + x^2)^{3/2} + c$$

Předpokládám, že jste se naučili integrovat mocninu (o 1 zvýším exponent a novým exponentem dělím, samozřejmě, původní exponent nesmí být -1), že nezapomínáte na integrační konstantu c.

Při použití substituční metody je nutná zpětná substituce, výsledek musí být vyjádřen v původní proměnné (pro nás x).

Mám dojem, že už teď je to pořádná porce ke čtení. A tak některé další příklady na substituci nechám do "cvičení 9-2". A tak i na příklad, v němž použijeme jak per partes, tak substituci, si musíte počkat "do příště".

Jne