Průběh funkcí

Vraťme se ještě k funkci $f(x) = x^3 - 3x$

Je to lichá funkce; ze cv.8-1 jsme víme, že

$\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathcal{R}$;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Její průběh jsme sledovali pomocí tabulky a grafu. Dnes si ukážeme, jak lze ke studiu jejího průběhu využít derivaci.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$

Zajímá nás, kde je derivace kladná (v okolí takového bodu je funkce rostoucí), kdy záporná (v okolí takového bodu je funkce klesající) a kdy nulová (jedině v takovém bodě může být lokální extrém – připomínám, že naše funkce má všude derivaci; z extrému by mohl být podezřelý i takový bod, ve kterém derivace neexistuje, s takovými funkcemi se nejspíš nesetkáte).

$f'(x) = 0$ pro $x = -1$ nebo $x = 1$. Jinde funkce nemůže měnit znaménko. Záleží na vás, jakou metodu pro řešení kvadratické nerovnosti zvolíte. V našem případě je mezi kořeny derivace záporná (příznak klesající funkce), vně kořenů je kladná (příznak rostoucí funkce).

Tedy $f(x) = x^3 - 3x$ je
je rostoucí na intervalu $(-\infty, -1\rangle$
je klesající na intervalu $\langle -1, 1\rangle$
je rostoucí na intervalu $\langle 1, \infty)$

V bodě -1 má funkce **lokální** maximum, $f(-1) = 2$ (přechází tam z rostoucí do klesající)
V bodě 1 má funkce **lokální** minimum, $f(1) = -2$ (přechází tam z klesající do rostoucí)

Globální maximum ani globální minimum funkce f nemá, nabývá všech hodnot z $\mathcal{R}$; některých dokonce opakovaně, tedy není prostá.

K vyšetření konvexnosti a konkávnosti slouží druhá derivace:

$f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x$

$f''(x) < 0$ na intervalu $(-\infty; 0)$
$f''(x) > 0$ na intervalu $(0; \infty)$

Tedy na intervalu $(-\infty; 0\rangle$ je funkce f konkávní (nula do tohoto intervalu patří), na intervalu $\langle 0; \infty)$ je konvexní (nula do tohoto intervalu patří)

Když určujeme, kde je funkce rostoucí, klesající, konkávní, konvexní, krajní body do příslušných intervalů patří, pokud je v nich funkce definována. Např. ln x je rostoucí a konkávní na $(0\ \infty)$, zatímco $\sqrt{x}$ je rostoucí a konkávní na $\langle 0\ \infty)$
V lokálním minimu je funkce konvexní (tedy $f''>0$; názorně: z lok. minima malou změnou argumentu se dostaneme k větším hodnotám).
V lokálním maximu je funkce konkávní (tedy $f''<0$; názorně: z lok. maxima malou změnou argumentu se dostaneme k menším hodnotám).

Pro naši funkci f platí: $f''(0) = 0$ a funkce tam přechází z konkávní do konvexní – tedy v bodě 0 má ***inflexní bod*** (to je bod, v němž funkce přechází z konvexní na konkávní nebo naopak). Místo inflexní bod říkáme zkráceně ***inflexe***.

===

Funkce $g(x) = x^3$ je na celé množině $\mathcal{R}$ rostoucí, přestože její derivace v 0 je rovna 0; nemění tam však znaménko, vlevo i vpravo od nuly je kladná.

Funkce $h(x) = x^4$ je na celé množině $\mathcal{R}$ konvexní, přestože její druhá derivace v 0 je rovna 0; nemění tam však znaménko, vlevo i vpravo od nuly je kladná.

===

Studujme ještě průběh funkce f(x) = arctg(-1/x).
V cv. 6.2 jsme ukázali

$\lim_{x\to\pm\infty}$ arctg $(-1/x)$ = arctg 0 = 0

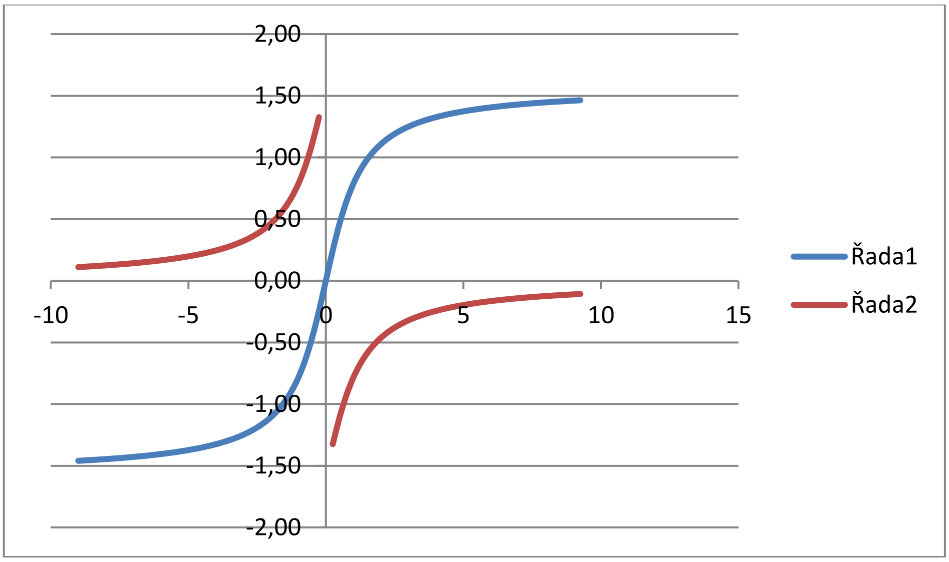
$\lim_{x\to 0-}$ arctg$(-1/x)$ = $\lim_{y\to+\infty}$ arctg y = $\pi/2$

$\lim_{x\to 0+}$ arctg$(-1/x)$ = $\lim_{y\to-\infty}$ arctg y = $-\pi/2$

V cv. 7.1 jsme pro f(x) = arctg(-1/x) vypočítali, že f'(x) = $1/(1 + x^2)$ = (arctg x)'

Následující obrázek ukazuje grafy funkcí f (hnědočerveně) a arctg (modře).
Pro x < 0 je f(x) = arctg x + $\pi/2$,
pro x > 0 je f(x) = arctg x - $\pi/2$.

f(x) a arctg(x) mají derivaci vyjádřenou stejným vzorcem. Jejich rozdíl je konstantní, ale vždy jen na intervalech, nikoli na celém děravém definičním oboru funkce f



A ještě jedna poznámka:
V tomto příkladě je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{R} - \{0\}$. Výraz pro derivaci $1/(1+x^2)$ je smysluplný i pro x = 0. Nenechme se tím plést, f pro 0 není definována, a tak nulu nemá smysl dosazovat ani do výrazu pro f'.
Podobně

Funkce ln x je definovaná jen pro $x > 0$. Výraz $1/x$ má smysl pro každé nenulové x. Záporná x ovšem do derivace funkce ln nemá smysl dosazovat.

Extrémy funkce na uzavřeném intervalu

Platí: ***Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá svého maxima i minima.***
Bavme se jen o funkcích, které mají všude derivaci.

Vezměme si nám už známou funkci $x^3 - 3x$; máme najít její extrémy na intervalu $\langle 0; 4\rangle$.
Extrémy mohou být
a) mezi body, kde je derivace rovná 0 (ale zajímají nás je ty, které leží uvnitř daného intervalu)
b) v krajních bodech intervalu.

Na začátku jsme vypočítali, že naše funkce má derivaci rovnou 0 v bodech -1 a 1, přičemž ovšem -1 neleží ve zkoumaném intervalu; takže výpočet derivace nám dá jediný "podezřelý" bod, a to **1**.

Extrémy budeme tedy hledat mezi hodnotami v bodech 1 (vnitřní bod s nulovou derivací), 0 a 4 (krajní body sledovaného intervalu).

$f(1) = 1^3 - 3.1 = -2$ (to už ostatně víme z cv. 8-1) MINIMUM
$f(0) = 0^3 - 3.0 = 0$
$f(4) = 4^3 - 3.4 = 52$ MAXIMUM

Maximum funkce $x^3 - 3x$ na intervalu $\langle 0; 4\rangle$ má tedy hodnotu 52 a funkce ho nabývá v bodě 4,
minimum funkce $x^3 - 3x$ na intervalu $\langle 0; 4\rangle$ má tedy hodnotu -2 a funkce ho nabývá v bodě 1.