

Ukážeme si užití derivace k výpočtu limit a ke zkoumání průběhu funkce. V tomto textu se budeme věnovat především prvnímu; k vyšetřování průběhu funkce si uděláme jen jakýsi úvod.

L'Hospitalovo pravidlo

a) slouží k výpočtu limit typu " $0/0$ ", " $\pm\infty / \pm\infty$ "

b) pozor, nejde v něm o derivaci podílu, nýbrž o podíl derivací

c) může se stát, že podíl derivací nemá limitu a podíl původních funkcí ano. V tom případě se musí limita počítat jinak. S takovým případem, kdy by se stalo, že podíl původních funkcí by měl limitu a podíl derivací nikoli, se asi nesetkáte. Na požádání mohu příklad takové limity poslat.

d) Může se používat opakovaně

e) Lze je použít i k výpočtu jednostranných limit

Pokud někomu nevyhovuje šikmé lomítko, přepište si příklady s použitím vodorovného lomítka

Příklad 1

Typ " $0/0$ "

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\sin 2x / (e^x - 1)] = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \cdot \cos 2x / e^x) = \\ = 2 \cdot \cos 0 / e^0 = 2 \cdot 1 / 1 = 1$$

Modré zvýrazněné rovnítko naznačuje, že jsme použili L'Hospitalovo pravidlo. Ostatní rovnosti odpovídají dosazování hodnot a algebraickým úpravám.

Příklad 2

Typ " $0/0$ "; dvojí použití L'Hospitalova pravidla
(připomínám: $\cos 0 = 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) / x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x / 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x / 2 = 1/2$$

L'Hospitalovo pravidlo je užitečné i na další neurčité výrazy; v příkladu 3 je použijeme na součin typu " $0 \cdot \infty$ ", v příkladech 4 a 5 na rozdíl " $\infty - \infty$ "

Příklad 3 (" $0 \cdot \infty$ ")

Počítejme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$. První činitel se blíží k nule, druhý k minus nekonečnu. Počítáme limitu zprava, protože pro záporná x není logaritmus definován. Výraz $x \cdot \ln x$ přepíšeme ve tvaru podílu. To lze udělat dvěma způsoby: $x \cdot \ln x = x / (1/\ln x) = \ln x / (1/x)$. Aplikací L'Hospitalova pravidla na dřívější z vyjádření bychom si nepomohli. Posledním vyjádřením ano. Abych se vyhnul složeným zlomkům se šikmým lomítkem, budu hlavní lomítko psát vodorovně.

Připomínám: $(\ln x)' = 1/x$, $(1/x)' = -1/x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Příklad 4 (" $\infty - \infty$ ")

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - e^x)$$

Vytkneme menšence nebo menšitele, rozhodl jsem se pro menšence

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot (1 - e^x / x^3)$$

První činitel má limitu nekonečno. Kdyby druhý činitel měl limitu 0, moc bychom si nepomohli. Musíme doufat, že jeho limita je jiná. Je třeba vypočítat limitu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x / x^3$$

To by pro vás už neměl být problém. Po trojím použití L'Hospitalova pravidla dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x / x^3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x / 6 = \infty$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot (1 - e^x / x^3) = \infty (1 - \infty) =$$

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

Poznámka. Pro odhad výsledku je dobré si osvojit představu, že nekonečno od exponenciály je nejvýraznější, nekonečno od mnohočlenu, popř. funkce x^k je slabší a nekonečno od logaritmu je úplně slaboučké. Tato úvaha však nesmí nahradit výpočet.

Příklad 5 (" $\infty - \infty$ ")

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

Menšenelec i menšitel mají limitu ∞ . Převedením na společného jmenovatele úlohu převedeme na typ " $0/0$ " a dvojím použitím L'Hospitalova pravidla zjistíme, že limita je 0.

=====

Průběh funkcí

Zpravidla jako cíl sledujeme udělat si graf, který chování funkce vyjadřuje.

Věnujme se funkci $f(x) = x^3 - 3x$

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Protože je to spojitá funkce, musí být $\mathcal{H}(f) = \mathcal{R}$

Je to lichá funkce.

Lichá je taková funkce, pro niž platí, že změním-li znaménko proměnné x , změní se znaménko funkčních hodnot, tj. $f(-x) = -f(x)$. Liché jsou např. funkce x , x^3 , x^5 , ... (lichá mocnina je lichou funkcí), a také sinus, tangens, arkustangens, a samozřejmě mnohé další. Pokud leží nula v definičním oboru liché funkce f , je $f(0) = 0$. Graf liché funkce je středově souměrný kolem počátku.

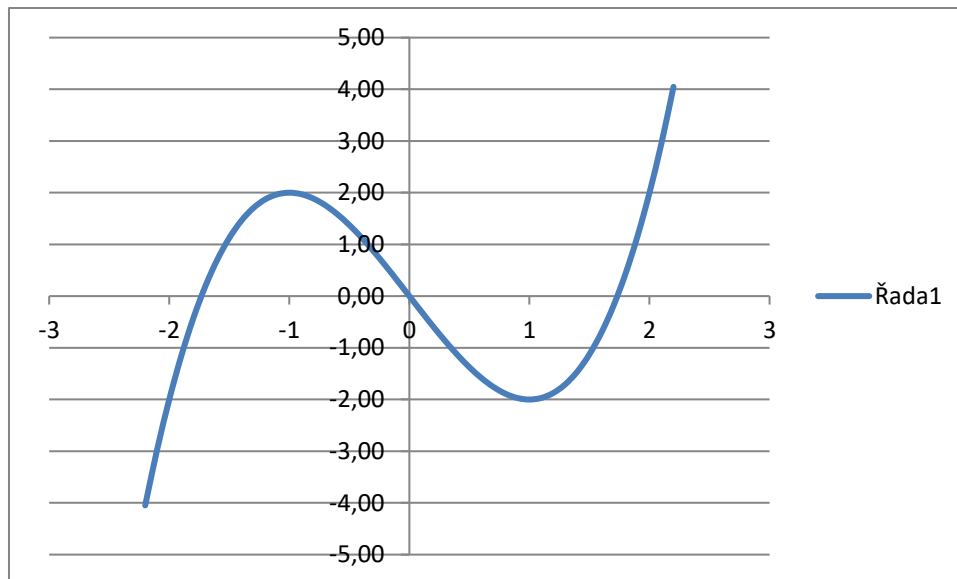
Analogicky **sudá** je taková funkce, pro niž platí, že změním-li znaménko proměnné x , funkční hodnota se nezmění, tj. $f(-x) = f(x)$. Sudé jsou např. funkce x^2 , x^4 , ... (sudá mocnina je sudou), a také kosinus a samozřejmě mnohé další. Graf sudé funkce je osově souměrný kolem osy y .

Samozřejmě nemůžeme načrtnout graf dané funkce f pro celý její neomezený definiční obor. Pro představu o grafu teď nepoužijeme zatím derivaci, ale tabulku znázorňující vybrané hodnoty (zaokrouhlené na dvě desetinná místa) z vhodně zvoleného intervalu:

x	$f(x)=x^3-3x$
-4	-52,00
-3,5	-32,38
-3	-18,00
-2,5	-8,13
-2,2	-4,05
-2,1	-2,96
-2	-2,00
-1,9	-1,16
-1,8	-0,43
-1,7	0,19
-1,6	0,70
-1,5	1,13
-1,4	1,46
-1,3	1,70
-1,2	1,87
-1,1	1,97
-1	2,00
-0,9	1,97
-0,8	1,89
-0,7	1,76
-0,6	1,58
-0,5	1,38
-0,4	1,14

-0,3	0,87
-0,2	0,59
-0,1	0,30
0	0,00
0,1	-0,30
0,2	-0,59
0,3	-0,87
0,4	-1,14
0,5	-1,38
0,6	-1,58
0,7	-1,76
0,8	-1,89
0,9	-1,97
1	-2,00
1,1	-1,97
1,2	-1,87
1,3	-1,70
1,4	-1,46
1,5	-1,13
1,6	-0,70
1,7	-0,19
1,8	0,43
1,9	1,16
2	2,00
2,1	2,96
2,2	4,05
2,5	8,13
3	18,00
3,5	32,38
4	52,00
4,5	77,63
5	110,00

I zde pro náčrt grafu je rozsah funkčních hodnot příliš velký, a proto použijeme hodnoty z intervalu $\langle -2,2; 2,2 \rangle$



Z grafu (a dívejte se i do tabulky – slovo "řada" na obrázku je zavádějící) vyčteme:

Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, -1)$
 V bodě -1 má funkce **lokální** maximum, $f(-1) = 2$
 Funkce je klesající na intervalu $(-1, 1)$
 V bodě 1 má funkce lokální minimum, $f(1) = -2$
 Funkce je rostoucí na intervalu $(1, \infty)$

Funkce nemá globální maximum ani globální minimum, nabývá všech hodnot z $\mathcal{R}$; některých dokonce opakovaně, tedy není prostá.

V lokálním maximu přechází funkce z rostoucí do klesající.
 V lokálním minimu přechází funkce z klesající do rostoucí.

Připomínám:

Funkce je na množině M **rostoucí**, právě když pro každou dvojici prvků $x_1, x_2 \in M$ takovou, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.
 Funkce je na množině M **klesající**, právě když pro každou dvojici prvků $x_1, x_2 \in M$ takovou, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Prosím Vás, všimněte si, naše funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty, -1)$ i na intervalu $(1, \infty)$, avšak *není rostoucí na jejich sjednocení* $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; platí

$$\begin{aligned} -1,3 &\in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ 1,3 &\in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ -1,3 &< 1,3 \\ f(-1,3) &= 1,7 > f(1,3) = -1,7 \end{aligned}$$

A na závěr jedno pozorování z grafu. Pokud bychom chtěli zakreslit v nějakém bodě tečnu ke grafu (přímku, která se grafu dotýká), bude pro záporná x ležet graf pod touto tečnou, pro kladná nad touto tečnou. Říkáme, že funkce f je na intervalu $(-\infty; 0)$ **konkávní** (rusky: vognutaja vniz), kdežto na intervalu $(0; +\infty)$ **konvexní** (rusky: vognutaja vverch).

První derivace slouží k hledání intervalů, na nichž je funkce rostoucí či klesající, a tedy i lokálních maxim a minim.

Konkávnost či konvexnost funkce určíme podle její druhé derivace, tedy pomocí derivace (gramatický předmět) derivace (gramatický neshodný přívlastek).