Pokračujme v derivování složených funkcí. Častý případ, který stojí za jakési "zautomatizování", je ten, kdy vnitřní funkce je lineární (kx + q). Derivujme sin (3x + 5); připomínám, že (3x + 5)' = 3:

$[\sin (3x + 5)]' = \cos (3x + 5) \cdot 3 = 3.\cos(3x + 5).$

Podobně:

$(e^{kx})' = k.e^{kx}$ (k je konstanta). (#)

Mezi "vzorečky" pro derivování je uvedeno (pro $a>0$):

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Tento vztah jednoduše odvodíme podle pravidla o derivování složené funkce. V matematické analýze se často pro výpočet uplatní vyjádření (pro $r>0$, ve výsledku pak už samozřejmě volíme jednodušší tvar):

$r = e^{\ln r}$

Místo a^x tedy můžeme psát $e^{\ln a \cdot x}$, přičemž ln a je konstanta. použijeme-li vztah (#), dostaneme

$(a^x)' = (e^{\ln a . x})' = \ln a . e^{\ln a . x} = \ln a \cdot a^x$

A to je jen jinak zapsaný 5. "derivovací vzoreček" (věta na str. 105 v učebnici z roku 2019)

A na závěr kapitolky o derivování složených funkcí ještě jeden příklad.

Derivujme funkci

$g(x) = \ln \sin \operatorname{arctg} x$

$$g'(x) = \frac{1}{\sin \operatorname{arctg} x} \cdot \cos \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{\cos \operatorname{arctg} x}{\sin \operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} =$$

$= \operatorname{cotg} \operatorname{arctg} x \,/\, (1 + x^2)$

Složená funkce cotg arctg by se dala vyjádřit svým způsobem jednodušeji, ale nedělejme to, byly by tu problémy s tím, že při definici funkce arctg jsme využili jen část definičního oboru funkce tg (arctg y = 1/tg y).

Tím cvičení 7 končím. Možná při psaní testu někdo použijete L'Hospitalovo pravidlo. Nejdřív, k čemu slouží.

Pro počítání limit nějaký jednotný návod nemáme, pro počítání derivací ano; při tom derivace je definována jako limita.

Při počítání limit hledáváme limitu podílu, kde čitatel i jmenovatel nabývají hodnotu 0, případně jak čitatel, tak jmenovatel se v absolutní hodnotě blíží nekonečnu.

Ve cv6-2 jsme vypočítali limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

V bodě 1 čitatel i jmenovatel nabývají hodnotu 0, takže zlomek pro x=1 nemá smysl. Limita se však netýká přímo bodu 1, nýbrž jeho blízkého okolí. Tam jsme k hodnotě 2 došli tak, že jsme zlomek rozdílem x-1 zkrátili.

Můžeme se však ptát po hodnotě limity

$\lim_{x\to 0}$ (sin 2x / e^x - 1)

Pro x = 0 jsou čitatel i jmenovatel rovny 0. Zde ale krácení použít nemůžeme. Můžeme použít L'Hospitalovo pravidlo. Je v učebnici v čl. 4.2. Omezím se na některé poznámky:

a) slouží k výpočtu limit typu "0/0", "±∞ / ±∞"

b) pozor, nejde v něm o derivaci podílu, nýbrž o podíl derivací

c) může se stát, že podíl derivací nemá limitu a podíl původních funkcí ano. V tom případě se musí limita počítat jinak. S případem, kdy by se stalo, že podíl původních funkcí by měl limitu a podíl derivací nikoli, se asi nesetkáte. Na požádání mohu příklad takové limity poslat.