Teď jeden příklad "z jiného soudku"; máme vypočítat

$\lim (\sqrt{n^2 + 6n} - \sqrt{n^2 - 1}) = \mathbf{L}$

Menšenec i menšitel se blíží k nekonečnu, jde o limitu typu "∞ - ∞". Tento rozdíl není definován, limitu musíme počítat. Při počítání limit bývá výhodnější pracovat s podílem než s rozdílem. My si tento výraz (představujeme se jej jako zlomek s jmenovatelem rovným 1) rozšíříme součtem oněch odmocnin a využijeme "vzorečků" $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$, $(\sqrt{X})^2 = X$

Tedy

$$\mathbf{L} = \lim \frac{(\sqrt{n^2 + 6n} - \sqrt{n^2 - 1})(\sqrt{n^2 + 6n} + \sqrt{n^2 - 1})}{(\sqrt{n^2 + 6n} + \sqrt{n^2 - 1})} =$$

To se v matematické analýze stává: cestou k cíli někdy je použít složitější vyjádření daného výrazu. Zde jsme v čitateli měli neurčitý výraz ∞ - ∞, po rozšíření se

a) v čitateli zbavíme nepříjemných odmocnin

b) ve jmenovateli dostaneme součet odmocnin, přitom pro počítání v $\mathcal{R}^*$ platí ∞ + ∞ = ∞, tedy součet odmocnin není neurčitý výraz.

S podobnou úpravou rozdílu odmocnin se ještě setkáme

$$= \lim \frac{((n^2 + 6n) - (n^2 - 1))}{(n\sqrt{1 + 6/n} + n\sqrt{1 - 1/n^2})} = \lim \frac{6n - 1}{n + n} = \lim \frac{6n - 1}{2n} = 3$$

Poslední zlomek je podíl dvou mnohočlenů, jehož limitě jsme se už věnovali. Červeně vyznačené výrazy se blíží k 0 (tj. mají za limitu 0).

Limita funkce

Vraťme se k posloupnosti $a_n = 0{,}5^n = (1/2)^n$. Víme, že $\lim a_n = 0$. U posloupnosti proměnná n probíhá přirozenými čísly (a zajímají nás ta "hodně veliká"). V 1. cvičení jsme se chvíli zabývali funkcí $f(x) = (1/2)^x$. Ta se od zmíněné posloupnosti liší tím, že proměnná x probíhá reálnými čísly. Pro přirozená x se chová stejně. Můžeme se ptát, k jaké hodnotě se funkce blíží, když x roste nade všechny meze. Zde to zas bude nula, vzpomeňte si na 1. cvičení. Píšeme

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (1/2)^x = 0$

Onen popis $x\to\infty$ se píše správně pod symbol "lim". Já to ve Wordu neumím. U reálných funkcí se setkáme i s jinými limitami než v "(plus) nekonečnu, a tak je ona informace, k čemu se x blíží, nutná.

Pozor:

lim $(-1/2)^n = 0$, ale $\lim_{x\to\infty} (-1/2)^x$ neexistuje (pro x, která nejsou celočíselná, není mocnina se záporným základem definována).

Limity v "minus nekonečnu" by neměly být problémem.

Příklad:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^6 + 10x^5}{-x^3 + 1}$$

Stupeň čitatele je větší než stupeň jmenovatele. Limita tedy může být ∞ nebo -∞. Pokud je x záporné a v absolutní hodnotě velké, v čitateli převáží člen x^6, tedy sudá mocnina, takže bude kladný, ve jmenovateli je nejvýraznější člen x^3, který "v okolí minus nekonečna" je záporný, nicméně je před ním znaménko "minus", takže pro ta v absolutní hodnotě velká záporná x je čitatel i jmenovatel kladný, a tak

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^6 + 10x^5}{-x^3 + 1} = \infty$$

Pokud je stupeň čitatele menší nebo roven stupni jmenovatele, je limita podílu mnohočlenů stejná v ∞ i v -∞ (popřemýšlejte si o tom).

Podívejme se nyní na funkci $G(x) = 1/x^2$. Její definiční obor je $\mathcal{R} - \{0\}$. Čím více se s proměnnou x k nule přibližíme, tím je hodnota funkce $G(x)$ větší, při dostatečně malém $|x|$ můžeme docílit libovolně velké hodnoty funkce $G(x)$. Zapíšeme to takto:

$\lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0} (1/x^2) = \infty$

Jak to bude s funkcí $H(x) = 1/x$?
Tam je to složitější. Když kladné x zmenšujeme k nule, hodnoty porostou nade všechny meze. Jenže když x bude záporné, hodnoty funkce H budou záporné a při přibližování k nule budou "klesat pode všechny meze". Zapíšeme to pomocí symbolů $x\to 0+$ (zajímají nás jen ta x, která jsou větší než 0), $x\to 0-$ (zajímají nás jen ta x, která jsou menší než 0):

$\lim_{x\to 0+} H(x) = \lim_{x\to 0+} 1/x = \infty$ (můžeme psát také $+\infty$)

$\lim_{x\to 0-} H(x) = \lim_{x\to 0-} 1/x = -\infty$

$\lim_{x\to 0} H(x) = \lim_{x\to 0} 1/x$ neexistuje.

Limita funkce v bodě c existuje, právě když v bodě c existuje jak limita zleva, tak limita zprava, a tyto jednostranné limity si jsou rovny.

Limita spojité funkce *f(x)* v bodě *c* je rovna její funkční hodnotě *f(c)*. To je triviální tvrzení. Platí tedy např. $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$. Pro počítání úloh na limity odtud dostaneme návod: "Když jde hodnotu dosadit, dosadíme ji. Až když to nejde, používáme nějaký výpočetní postup". Platí to ovšem, jen pokud se pohybujeme mezi spojitými funkcemi, což běžně děláme.

A ještě jedna důležitá poznámka:
Když nás zajímá limita $\lim_{x \to c} f(x)$, staráme se o hodnoty funkce $f(x)$ pro x, která jsou k c blízko, avšak nikoli o bod c, tedy stále máme na mysli $x \neq c$.

Příklad:

Máme funkci $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Platí $\mathcal{D}(f) = \mathcal{R} - \{1\}$

Čitatel můžeme rozložit na součin a pro $x \neq 1$ můžeme krátit.
$f(x) = (x - 1)(x + 1)/(x - 1) = x + 1 = g(x)$

Funkci g jsme si zde nadefinovali; platí $\mathcal{D}(g) = \mathcal{R}$. Funkce f a g si jsou rovny všude, kde jsou obě definovány, g je definována všude, f všude kromě 1. Protože u limity v bodě c se o hodnotu v bodě c nezajímáme, můžeme psát

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = 1 + 1 = 2$

Využíváme toho, že zatímco f není v bodě 1 definovaná, g tam definovaná je a je tam spojitá.

Vypočítali jsme tedy

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Pokud bychom do výrazu $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ dosadili, dostali bychom *neurčitý výraz* typu "0/0". Limity v takovýchto případech musíme vhodným způsobem počítat. U podílu mnohočlenů bývá tím vhodným způsobem krácení.

Stává se, že máme vypočítat limity v krajních bodech definičního oboru. V těchto případech počítáme ve vnitřních bodech limity zprava i zleva

Příklad:

Vypočítat limity v krajních bodech definičního oboru pro funkci

$$\varphi(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$$

Platí $\mathcal{D}(\varphi) = \mathcal{R} - \{-2; 2\} = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$

Podle toho, co jsme si na začátku zmínili o limitách v nevlastních bodech, je $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 1$

<u>Bod $x = -2$:</u> Zde jde o typ "0/0". Využijeme možnost krátit

$$\varphi(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x + 2)^2}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{(x + 2)}{(x - 2)},$$

a tedy $\lim_{x\to-2} \varphi(x) = (-2 + 2)/(-2 - 2) = 0/4 = 0$

<u>Bod $x = 2$:</u>
Můžeme použít tvar po zkrácení (je zapsán modře), lépe se s ním počítá. Čitatel je roven 4, jmenovatel je roven nule.

Počítejme $\lim_{x\to2+} \varphi(x)$. Čitatel je kladný, x ve jmenovateli se blíží zprava k 2, jmenovatel (rozdíl) se zmenšuje k 0, ale zůstává kladný, a tedy podíl je kladný. Tedy
$\lim_{x\to2+} \varphi(x) = +\infty$

Počítejme $\lim_{x\to2-} \varphi(x)$. Čitatel je kladný, x ve jmenovateli se blíží zleva k 2, jmenovatel (rozdíl) se zmenšuje k 0, a je stále záporný ($x < 2$), a tedy podíl je záporný. Tedy
$\lim_{x\to2-} \varphi(x) = -\infty$

Limity funkce φ v krajních bodech definičního oboru tedy jsou:
$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 1$
$\lim_{x\to-2} \varphi(x) = 0$
$\lim_{x\to2+} \varphi(x) = +\infty$
$\lim_{x\to2-} \varphi(x) = -\infty$

A ještě jeden příklad na limity funkce v krajních bodech definičního oboru:

Věnujme se funkci $f(x) = \text{arctg}\,(-1/x)$

$\mathcal{D}(f) = \mathcal{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Jde o složenou funkci; *vnitřní* funkce je -1/x (není definovaná pro x = 0), *vnější* je akustangens (definován všude).

Limity vnitřní funkce:

$\lim_{x\to\pm\infty} (-1/x) = 0$ $\lim_{x\to 0-} (-1/x) = +\infty$ $\lim_{x\to 0+} (-1/x) = -\infty$

Pomocí nich vypočítáme limity dané funkce:

$\lim_{x\to\pm\infty} \text{arctg}\,(-1/x) = \text{arctg}\,0 = 0$

Zde využíváme toho, že arctg je v 0 definována a spojitá, můžeme dosadit. Protože ±∞ není v definičním oboru funkce arctg ($\mathcal{D}(\text{arctg}) = \mathcal{R}$), použijeme pomocnou proměnnou y:

$\lim_{x\to 0-} \text{arctg}(-1/x) = \lim_{y\to+\infty} \text{arctg}\,y = \pi/2$

$\lim_{x\to 0+} \text{arctg}(-1/x) = \lim_{y\to-\infty} \text{arctg}\,y = -\pi/2$

K této funkci se ještě (aspoň doufám) vrátíme.