

Limita posloupnosti

(učebnice, oddíl 3.1)

Posloupnost je zobrazení množiny všech přirozených čísel (ať už $\mathcal{N}_0$ nebo $\mathcal{N}$ - tedy ať už nulu mezi přirozená čísla počítáme nebo ne) do množiny reálných čísel. Číslo, které přiřazujeme číslu n označujeme pomocí indexu, např. a_n, c_n, x_n, α_n . Posloupnost často vyjadřujeme pomocí počátečních členů, např. pro $a_n = 1/2^n$ píšeme

$(1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots)$

pro $b_n = 1/n$ pak

$(1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$

S tím, že v prvním případě začínáme od a_0 , v druhém od b_1 , si nelámeme hlavu. Jde ným především o uspořádané hodnoty členů posloupnosti.

Podívejme se nyní na chování posloupnosti q^n pro různé hodnoty q (zde je šikovné brát n od nuly, aby pro záporná q byl první člen kladný - tak je to "hezčí"):

$q = 2$:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

$q = 1$:

1, 1, 1, 1, 1, 1, ... (posloupnost samých jedniček)

$q = 0,5$:

1, 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625, 0,03125, 0,015625, ...

$q = 0$:

0, 0, 0, 0, 0, 0, ... (posloupnost samých nul)

$q = 0,5$:

1, -0,5, 0,25, -0,125, 0,0625, -0,03125, 0,015625 ...

$q = -1$:

1, -1, 1, -1, 1, -1, 1 ... (střídají se 1 a -1)

$q = -2$:

1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, ...

Hodnoty posloupností s hodnotami $q = \pm 0,5$ se blíží k nule, při 0,5 se stále zmenšují; pro libovolně malé kladné číslo ϵ při dostatečně velkém n se můžeme k nule přiblížit o méně než toto ϵ . Při 0,5 se k nule blížíme shora, členy posloupnosti jsou stále menší a menší (je to *klesající* posloupnost, při -0,5 členy "oscilují" kolem nuly, avšak jejich amplituda je stále menší, k nule se neomezeně blíží.

Říkáme, že tyto posloupnosti mají limitu 0. Tuto skutečnost zapisujeme takto:

$$\lim 0,5^n = \lim 0,5^n = 0$$

Při $q = 0$ a při $q = 1$ máme konstantní posloupnosti. Při jejich procházení v nule, resp. jedničce jsme stále. I toto chování zahrneme mezi "blížení se" či přibližování, tedy platí

$$\lim 0^n = 0, \quad \lim 1^n = 1$$

Podívejme se na $q = 2$. Zde se posloupnost také docela uspořádaně chová, její členy rostou nade všechny meze. Když budu chtít, aby členy byly větší než 1 000 000, stačí, když zvolím $n = 20$, příslušný člen bude $2^{20} = 1\,048\,576$, a každý další člen je větší.

Abychom mohli tento typ chování posloupnosti pomocí limity vyjádřit, **rozšiřujeme** pro práci s limitami množinu $\mathcal{R}$ všech reálných čísel o dva prvky: ∞ a $-\infty$, rozšířenou množinu všech reálných čísel značíme $\mathcal{R}^*$, tedy

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Uspořádání na $\mathcal{R}^*$:

Pro všechna "obyčejná" reálná čísla $x \in \mathcal{R}$ je $-\infty < x < \infty$

Na množinu $\mathcal{R}$ rozšiřujeme i aritmetické operace (viz učebnice), důležité je, že některé výsledky zůstávají nedefinovány, jako např. ∞ / ∞ , $\infty - \infty$ (a také $0/0$).

Limita výše uvedených posloupností pro $q = -1$ a $q = -2$ neexistuje. Nechci tvrdit, že se chovají úplně chaoticky, ale jejich chování se do pojmu limita nevejde. **Posloupnost má nejvýše jednu limitu.**

Samozřejmě za q lze volit i jiná čísla.

Platí:

Pro $q > 1$ je $\lim q^n = \infty$;

$\lim 1^n = 1$;

pro $q \in (-1, 1)$ je $\lim q^n = 0$

pro $q \leq -1$ $\lim q^n$ neexistuje.

A podívejme se ještě na limity dalších hodně jednoduchých posloupností.

$$\lim n = \infty, \quad \lim (-n) = -\infty$$

Pro $k > 0$ je $\lim n^k = \infty$, $\lim 1/n^k = 0$ (první posloupnost je definována i pro $n = 0$, u druhé musíme n začít od jedničky, aby ve jmenovateli nebyla nula)

To využíváme při řešení příkladů.

Typ úlohy: limita mnohočlenu

$$\text{Počítejme } \lim (-3n^5 + 12n^2 + 1) = n^5 (-3 + 12/n^3 + 1/n^5) = \infty \cdot (-3 + 0 + 0) = -\infty$$

Vyžívám toho, že u červeně zapsaných členů je limita rovna 0.

Mnohočlen stupně aspoň 1 má za limitu $-\infty$ nebo ∞ v závislosti na znaménku členu s nejvyšší mocninou.

Typ úlohy: limita podíl mnohočlenů

$$\text{Počítejme } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 - 1}$$

Když zlomek vykrátíme n^2 , dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1 - 1/n^2} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

Využíváme toho, že limita červeně zapsaných zlomků je 0

Všimněte si, že posloupnost není definována pro $n = 1$. To nevadí. Když počítáme limitu, stačí nám, když je posloupnost definována pro všechna n určitým indexem počínajíc, v našem případě je pro všechna $n \geq 2$.

Podobně postupujeme při počítání limit podílů jakýchkoli mnohočlenů. Vždy zlomek zkrátíme proměnnou n umocněnou na stupeň jmenovatele. Výše uvedený příklad naznačuje, že – pokud mnohočlen v čitateli má menší stupeň než mnohočlen ve jmenovateli, je limita jejich podílu rovna 0.

Pokud mají číselník i jmenovatel stejný stupeň, je limita rovna podílu koeficientů u členů s nejvyšší mocninou v čitateli a jmenovateli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - n}{-2n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - 1/n^2}{-2 + 1/n^3} = \frac{6}{-2} = -3$$

A teď už jen bez příkladu:

Limita podílu mnohočlenů v případě, že mnohočlen v čitateli má vyšší stupeň než mnohočlen ve jmenovateli, je nevlastní, tedy může být $-\infty$ nebo ∞ ; závisí to na znaménkách členů s nejvyšší mocninou v čitateli a jmenovateli.

Teď jeden příklad "z jiného soudku"; máme vypočítat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n} - \sqrt{n^2 - 1}) = \mathbf{L}$$

Menšene i menšitel se blíží k nekonečnu, jde o limitu typu " $\infty - \infty$ ". Tento rozdíl není definován, limitu musíme počítat. Při počítání limit bývá výhodnější pracovat s podílem než s rozdílem. My si tento výraz (představujeme se jej jako zlomek s jmenovatelem rovným 1) rozšíříme součtem oněch odmocnin a využijeme "vzorečku" $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$, $(\sqrt{X})^2 = X$

Tedy

$$\mathbf{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 6n} - \sqrt{n^2 - 1})(\sqrt{n^2 + 6n} + \sqrt{n^2 - 1})}{(\sqrt{n^2 + 6n} + \sqrt{n^2 - 1})} =$$

$$= \lim \frac{((n^2 + 6n) - (n^2 - 1))}{(n\sqrt{1 + 6/n} + n\sqrt{1 - 1/n^2})} = \lim \frac{6n - 1}{n + n} = \lim \frac{6n - 1}{2n} = 3$$

Poslední zlomek je podíl dvou mnohočlenů, jehož limitě jsme se už věnovali. Červeně vyznačené výrazy se blíží k 0 (tj. mají za limitu 0).

Poznámka k zápisu výpočtu limity: Dokud se ve výrazu vyskytuje n , musí výraz začínat symbolem $\lim$.

Příklad (uvažujte o jednotlivých krocích):

$$\lim \frac{4^n + 5 \cdot 3^{2n}}{5^n - 7^n} = \lim \frac{4^n + 5 \cdot 9^n}{5^n - 7^n} = \lim \frac{(4/7)^n + 5 \cdot (9/7)^n}{(5/7)^n - 1} = \mathbf{L}$$

Zlomek jsme vykrátily "nejvýraznějším" členem ve jmenovateli. Červené členy se blíží k nule, zelený k nekonečnu. Tedy

$$\mathbf{L} = \infty / (-1) = -\infty$$

A na závěr jeden příklad s parametry.

Máme určit, pro které hodnoty parametrů a , b platí

$$0 < \lim \left(\frac{an^2 - 1}{n} - b \right) < \infty$$

Zlomek převedeme na společného jmenovatele; zabýváme se tedy limitou

$$\lim \frac{an^2 - bn - 1}{n}$$

Aby limita nebyla nekonečno, nesmí mít čítec větší stupeň než jmenovatel, tedy musí být $a = 0$. Pak

$$\lim [(-bn - 1)/n] = -b$$

Aby byla kladná, musí být $b < 0$

Řešením příkladu tedy je $\boxed{a = 0 \text{ a } b < 0}$