Limita - úvod

(1) Uvažujme radioaktivní látku s poločasem rozpadu 1 den.

Za jeden den tedy její záření klesne na 1/2

Za n dní pak její záření klesne na $(1/2)^n$

Ona bude zářit vždy, stále , byť čím dále méně (v praxi pro velké n bude $(1/2)^n$ mít tak malou hodnotu, že ji přístroje nezaregistrují)

Ta hodnota nikdy nebude 0, ale k nule se neomezeně blíží.

Zapíšeme to

$\lim (1/2)^n = 0$, případně (podrobněji) $\lim_{n\to\infty} (1/2)^n = 0$.

(2) Staří Řekové uvažovali o tom, jak rychlý běžec Achilles honí pomalou želvu. Dospěli k závěru, že ji nemůže dohonit. Jejich úvahu můžeme současnými vyjadřovacími prostředky formulovat takto. Achilles vyrazí z bodu A_0, želva je zatím v A_1. Když bude Achilles v A_1, želva už něco uleze a bude v A_2. Atd. Zkrátka, když Achilles bude v bodě A_k, želva už bude před ním v bodě A_{k+1}, tudíž Achilles želvu nemůže dohonit.

Tento slavný ***Zenonův paradox*** ukazuje, jak důležitý pro myšlení je pojem ***limity***. Předpokládejme pro jednoduchost, že Achilles běží (docela pomalu) 2 m/s, želva leze poloviční rychlostí, tedy 1 m/s. A počáteční vzdálenost mezi body A_0 a A_1 nechť je 256 m. Než tuto vzdálenost Achilles uběhne, želva uleze 128 m a bude v bodě A_2; mezi A_1 a A_2 je tedy už jen 128 m, mezi A_2 a A_3 bude 64 m, atd., mezi A_8 a A_9 to už bude je 1 m, mezi A_{11} a A_{12} jen 12,5 cm (což by už mohl Achilles želvě šlápnout na ocas).

Označme a_k vzdálenost mezi body A_{k-1} a A_k. Platí $a_k = 512.(1/2^k)$.

$\{a_k\}$ je geometrická posloupnost s počátečním členem 256 (měříme v metrech) a kvocientem 1/2.

A dále označme d_k vzdálenost, kterou Achilles uběhl z výchozího bodu, tedy $d_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$. Podle známého vzorce pro součet členů geometrické posloupnosti

$$s_k = a_1 \frac{1 - q^k}{1 - q} = 256 . \frac{1 - (1/2)^k}{1/2} = \frac{256}{1/2} - \frac{256.(1/2)^k}{1/2} =$$

$$512 - 512.(1/2)^k$$

Ať je k jakkoli velké, hodnota s_k nikdy nepřekročí 512. Platí

$\lim a_k = 0$, $\lim s_k = 512$. Když Achilles uběhne 512 m, želvu dohoní. Ta bude mít za sebou 256 m. Bodů A_k na jejich dráze bude nekonečně mnoho - nekonečně mnoho bodů se na úsečku (trať) vejde. Čím blíže k "bodu setkání", tím budou u sebe hustěji. Pojem nekonečna byl oněm moudrým a vzdělaným Řekům přece jen ještě cizí.