# Determinanty - dokončení

## Věta o násobení determinantů

Jsou-li **A** a **B** dvě čtvercové matice téhož řádu, pak

$$\det(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \,.\, \det \mathbf{B}$$

Na levé straně násobíme matice (není komutativní), na pravé straně čísla (je komutativní)

Tedy, přestože pro matice je běžné, že $\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$ (**A**, **B** jsou čtvercové matice téhož řádu), platí $\det(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}.\mathbf{A})$

Pro jednotkovou matici **J** každého řádu platí $\boxed{\det \mathbf{J} = 1}$

Proto pro každou regulární matici **A** platí

$$\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$$

Že máme determinant čtvercové matice ve jmenovateli, nevadí. Nemůže být roven nule. Platí totiž

***Čtvercová matice je regulární, právě když její determinant je různý od nuly***. Jinými slovy: ***Čtvercová matice je singulární, právě když její determinant je roven nule***.

## Cramerovo pravidlo

K tomu, co je v učebnici, dodávám:

Cramerovo pravidlo je vhodné, když nás zajímá třeba jen jedna z mnoha proměnných. Smůla je, že - neznáme-li všechny proměnné - nemůžeme udělat zkoušku dosazením.

Cramerovo pravidlo lze použít, právě když matice soustavy je čtvercová a regulární, tedy právě když lze použít výpočet pomocí inverzní matice. Přitom při použití počítače (mám na mysli především využití Excelu) je řešení pomocí inverzní matice pohodlnější.

U zkouškových písemek se vyskytují příklady typu "Cramerovým pravidlem vypočítejte $x_2$ z dané soustavy rovnic". Musíte v tomto případě Cramerovo pravidlo použít. Podobně i jindy, pokud je vám metoda řešení předepsána, musíte ji použít.

## Charakteristická čísla matice

Věnovali jsme se teď determinantům. Determinant je reálné číslo, které je pomocí určitých pravidel (která jsme si uvedli) přiřazeno každé čtvercové matici (s reálnými čísly). A platí dokonce, že jestliže je matice tvořena celými čísly, je její determinant celé číslo.

Čtvercovým maticím řádu *n* je někdy užitečné přiřadit určitou *n*-tici čísel, tzv. ***charakteristických*** čili ***vlastních*** čísel. My se omezujeme na matice s reálnými čísly; jejich *charakteristická mohou být imaginární*. ***Charakteristická čísla symetrické matice (s reálnými čísly) jsou vždy reálná***. I některé nesymetrické matice mají všechna charakteristická čísla reálná.

Nejsem s to vám stručně říci, k čemu charakteristická čísla jsou. Osobně jsem se při studiu setkal s jejich využitím při studiu rotačního pohybu tělesa či v teorii pružnosti a pevnosti. To ovšem pro ekonomy není. Snad tedy aspoň hodně volně: Máme-li symetrickou matici popisující nějaký problém, tak někdy ji lze nahradit maticí, která má v hlavní diagonále její charakteristická čísla a jinde samé nuly. Tato matice má s původní stejný determinant a stejný součet prvků v hlavní diagonále.

Příklad:

Máme najít charakteristická čísla matice $\mathbf{A} = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1. \end{matrix}$

Znamená to najít řešení rovnice det ($\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{J}$) = 0 (neznámá je $\lambda$),

tedy $\begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{matrix} = 0$, tj.:

$$(2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1.1 = 0$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0.$$

Jejím řešením jsou reálná iracionální čísla

$$\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2$$

$$\lambda_2 = (3 - \sqrt{5})/2$$

Součin charakteristických čísel matice je roven jejímu determinantu. Znamená to, že regulární matice má samá nenulová charakteristická čísla, singulární má mezi nimi 0.

Zkuste si vypočítat, že singulární matice

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

má charakteristická čísla 0 a -2.

Najít charakteristická čísla matice řádu $n$ znamená řešit algebraickou rovnici $n$-tého stupně. **To obecně umíme jen pro $n \leq 2$.**

U vyšších stupňů si můžeme pomoci "uhodnutím" některého kořene, což jde zvlášť dobře, je-li kořenem 0 (v rovnici chybí absolutní člen), tedy u singulárních matic.

Řešme úlohu: Máme najít charakteristická čísla matice

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}$$

Musíme řešit rovnici

$$\begin{matrix} (1-\lambda) & 1 & -2 \\ -2 & (1-\lambda) & 1 \\ 1 & -2 & (1-\lambda) \end{matrix} = 0$$

Použijeme Sarusovo pravidlo (všechny součiny ve směru vedlejší diagonály jsou stejné):

$$[(1-\lambda)^3 + (-2)^3 + 1] - [3.(-2).(1-\lambda).1] =$$

$$= 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 8 + 1 + 6(1-\lambda) =$$

$$= 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 8 + 1 + 6 - 6\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda =$$

$$-\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 9) = 0$$

Jedním charakteristickým číslem (kořenem této rovnice) je nula (vytknuté λ), další dostaneme jako řešení kvadratické rovnice

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 9) = 0,$$

která nemá reálné řešení.

K už nalezenému $\lambda_1 = 0$ přibudou (imaginární) hodnoty

$\lambda_{2,3} = (3 \pm 3\sqrt{3}\ i)/2$

Zadaná matice není symetrická, a tedy imaginární charakteristická čísla nejsou překvapením (symetrická matice má vždy reálná charakteristická čísla; nesymetrická je může mít všechna reálná, může však mezi nimi mít i čísla imaginární).

Terminologická poznámka:

Množina všech reálných čísel je podmnožinou všech komplexních čísel.

Komplexní čísla lze zapsat ve tvaru $a + bi$

Je-li $b = 0$, jde o číslo reálné.

Je-li $\boldsymbol{b \neq 0}$, jde o číslo imaginární

Je-li $b \neq 0$ a $\boldsymbol{a = 0}$, jde o číslo **ryze** imaginární.