Determinanty

Minule jsme si řekli, co je determinant 2. a 3. řádu. Determinanty vyšších řádu definujeme **rekurentně**, tedy determinant 4. řádu definujeme pomocí determinantu 3. řádu, determinant 5. řádu pomocí determinantu 4. řádu apod. Slouží k tomu **rozvoj podle řady**. ***Řada*** je společný název pro řádek i sloupec. Ukážeme si to na determinantu řádu 4.

Máme vypočítat determinant

$$a = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{matrix}$$

Determinant vypočítáme *rozvojem podle druhého řádku*. Každý z prvků druhého řádku vynásobíme ***subdeterminantem***, který z původního determinantu zbude, když v něm škrtneme řádek a sloupec, v nichž tento prvek leží. Před takovýto výraz pak dáme znaménko "-" nebo "+" podle tohoto pravidla: Prvku vlevo nahoře náleží "+". Od této pozice se pohybujeme buď vertikálně, nebo horizontálně (tedy nikoli šikmo), přičemž při každém kroku se změní znaménko. V determinantu řádu 4 tedy jednotlivým prvkům příslušejí znaménka:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Výsledné výrazy sečteme.

V našem příkladu tedy máme

$$a = -1.\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 27 & 64 \end{matrix} + 4.\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 27 & 64 \end{matrix} - 9.\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 64 \end{matrix} +$$

$$+ \ 16.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 27 \end{matrix} = -1.[(128+24+108)-(32+192+54)] +$$

+ 4.[(64+3+108)-(192+4+27)] - 9.[(64+2+32)-(4+128+8)] +

+ 16.[(27+2+24)-(3+54+8)] =

= -1.(-18) + 4.(-48) - 9.(-42) + 16.(-12) =

= 18 - 192 + 378 - 192 = **12**

Determinanty řádu 3 jsou počítány Sarusovým pravidlem.

Ke stejnému výsledku bychom došli při rozvoji podle kterékoli jiné řady.

Je to hodně pracný výpočet. Příjemný je v případech, kdy je v determinantu (to znamená v matici, jejíž determinant počítáme) hodně nul. V učebnici je několik takových příkladů.

Minule jsme si uvedli, jak se počítají determinanty řádu 2 a 3.

Je to užitečné, ale nemuseli jsme to dělat, teoreticky by bývalo stačilo uvést, že pro matici

$\mathbf{A} = [a]$ je

det $\mathbf{A} = |a| = a$

Už determinanty vyššího řádu bychom pak definovali pomocí rozvoje podle řady a dostali bychom vztahy, které jsme si uvedli.

Používat pro determinanty řádu 1 označení $|a|$ je nejednoznačné, protože stejně značíme absolutní hodnotu. Proto se na determinanty řádu 1 díváme jako na jakýsi hraniční či teoretický případ a dost se jim vyhýbáme - není tam co počítat. V době, kdy vznikala symbolika, se o determinantech řádu 1 neuvažovalo.

Počet kroků, které výpočet determinantu řádu n rozvojem podle řady vyžaduje, je úměrný číslu $n!$. Pro odhad: $20! \approx 2{,}4 \cdot 10^{18}$. Kdyby počítač udělal 10^{10} operací za sekundu a rok má $3{,}2 \cdot 10^{7}$ sekund, na 20! operací by potřeboval 7,5 roku. Jenže počet operací by mohl být třeba 20násobek čísla $n!$ 150 let čekat na výsledek výpočtu determinantu, to by se asi nikomu nechtělo!

Proto základní metoda výpočtu determinantu je převod na trojúhelníkový tvar. Determinant trojúhelníkové matice (která má pod hlavní diagonálou samé nuly, je roven součinu prvků v hlavní diagonále. Při převodu na trojúhelníkový tvar používáme elementární úvahy známé ze zjišťování hodnosti matice či z řešení lineárních algebraických rovnic. Přitom:

- Cokoli můžeme dělat s řádky, můžeme dělat i se sloupci.

- Jestliže některou řadu znásobíme, resp. vydělíme číslem k, vynásobí, resp. vydělí se tímto čísel hodnota determinantu. Proto je smysluplné uvažovat jen $k \neq 0$.

- Vyměníme-li navzájem dva řádky (popř. dva sloupce), změní se znaménko determinantu, avšak jeho absolutní hodnota zůstane stejná.

- Přičteme-li k řádku determinantu libovolný násobek jiného řádku, hodnota determinantu se nezmění. (Totéž pro sloupce).

Počítejme determinant

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

převodem na trojúhelníkový tvar. K druhému, třetímu i čtvrtému řádku přičtu (-1)-násobek prvního (tedy: odečtu od nich první řádek):

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 24 & 60 \end{vmatrix}$$

Vyměním 2. a 3. řádek, pak k 3., resp. 4. řádku přičtu dvojnásobek, resp. šestinásobek druhého:

$$a = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 24 & 60 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 42 \end{vmatrix}$$

Teď od posledního řádku odečtu šestinásobek předposledního; dostanu

$$a = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Determinant a je vyjádřen trojúhelníkovou maticí; tedy

a = -(1.(-1).2.6) = 12

Počet výpočetních kroků při výpočtu determinantu převodem na trojúhelníkový tvar je úměrná n^3. To je (zvláště pro počítač) velice přijatelné.

Často metody kombinujeme, např. onen ve Wordu zeleně a odlišný typem písma determinant (ve skenované kopii zelená barva není) bychom mohli šikovně počítat rozvojem podle prvního sloupce.

Z cvičení v učebnici prof. Klůfy, uvedených k odd. 2.5, byste měli být schopni řešit všechna cvičení 1 až 8 (str. 79-80 ve vyd. 2019, str.73-74 ve vyd. 2013). Je dobré vyřešit co nejvíce příkladů, ale zas je třeba, aby se vám počítání neznechutilo; kromě toho - pokud vám to už jde - je vhodné racionálně hospodařit s časem. Nejednou stojí za to mít na mysli, že determinant dané matice a determinant matice k ní transponované si jsou rovny.