# 4. cvičení - 12/03/2020

**Pokračování**

Řešení soustavy LR pomocí inverzní matice

Každou soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat ve tvaru

**Ax = b,**

kde **A** je matice soustavy (typu (m, n)), **x** a **b** jsou "sloupcové vektory", tedy matice s jedním sloupcem, **x** je sloupcově zapsaný vektor neznámých (má n "řádků") a **b** je vektor pravých stran s m řádky. Tento zápis je v podstatě kompaktním, zhuštěným zápisem klasické soustavy lineárních rovnic. Nic víc. Zajímavým se stává, když matice **A** je *čtvercová* a *regulární*, tedy k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ .

Pak můžeme maticí $\mathbf{A}^{-1}$ vynásobit obě strany výše uvedené rovnosti:

$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$.

Násobení matic je ovšem *asociativní*, $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{J}$, tedy

$\mathbf{Jx} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$,

tj.

$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$

Máme tak další ***metodu řešení soustav lineárních algebraických rovnic – řešení prostředictvím inverzní matice***, použitelné právě tehdy, když matice soustavy je ***čtvercová regulární***

Následující soustavu jsme už řešili Jordanovou metodou a doufám, že jste si ji i dořešili Gaussovou metodou.

$x + y + z = 2$

$x + 2y + 3z = 2$

$x + 3y + 6z = 3$

Matice soustavy: $A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{matrix}$

V mejlu cv04-1, odeslaném 11. března, bylo vypočítáno, že

$$A^{-1} = \begin{matrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}$$

Násobme tedy

$$\begin{matrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix} \quad . \quad \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 3.2 + -3.2 + 1.3 \\ -3.2 + 5.2 + -2.3 \\ 1.2 + -2.2 + 1.3 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Poslední sloupec je tedy sloupcově zapsaný vektor řešení

x = (3, -2, 1)

## $\boxed{\text{Maticové rovnice}}$

Máme najít matici X vyhovující rovnosti

$\boxed{\mathbf{AX + B = 2X}}$

První úpravu uděláme jako u obyčejných rovnic

**AX – 2X = -B**

Matici **X** odtud nemůžeme vytknout, v první sčítanci je zleva násobena maticí, v druhém číslem. Využijeme toho, že **JX = X;** matice **X** je *pravým* činitelem, a proto ji vytkneme za závorku:

**(A - 2J) X = - B**

**Pokud matice (A - 2J)** je regulární (a tedy k ní existuje inverzní matice), můžeme touto inverzní maticí znásobit obě strany právě uvedené rovnosti; dostaneme

**J.X = (A - 2J)$^{-1}$ . (-B)**,

tedy:

**X = (A - 2J)$^{-1}$ . (-B)**

Násobení matic není komutativní, proto rovnice

$\boxed{\mathbf{XA + B = 2X}}$

je jiná než ta, kterou jsme právě řešili: Její řešení bude probíhat obdobně:

**XA – 2XJ = -B**

Násobení číslem lze do součinu matic zapsat i na jiné místo, tedy- můžeme psát

**XA – X.2J = -B**

**X** nyní vytkneme před závorku:

**X(A - 2J) = -B** , tedy

**X = -B (A-2J)$^{-1}$**

**Řešme tyto rovnice pro konkrétní matice**

$$A = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

**B** je singulární matice, což nám může být zcela jedno

$$A - 2J = \begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \qquad -B = \begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

To je regulární matice; vypočítáme

$$(A - 2J)^{-1} = \begin{matrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{matrix}$$

**Řešení rovnice AX + B = 2X**

$$X = (A - 2J)^{-1} . (-B) = \begin{matrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{matrix} . \begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

**Řešení rovnice XA + B = 2X**

$$X = -B\,(A-2J)^{-1} = \begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \begin{matrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

-

**Nejde-li matice invertovat, nutno řešit ve složkách**

**Rovněž ve složkách nutno řešit rovnice typu AX + XB = C, kde se vyskytuje násobení zleva i zprava**

**Determinant** je číslo přiřazené čtvercové matici

Determinant je součtem všech součinů takových, že obsahují právě jeden prvek z každého řádku a současně právě jeden prvek z každého sloupce, přičemž některé z těchto součtů se násobí číslem -1:

Místo "determinant matice řádu n" říkáme *determinant řádu n*. Determinanty značíme svislými čarami (viz oskenovanou kopii)

Determinant řádu 2 :

a b = ad - bc

c d

Determinant řádu 3

a b c

d e f

g h i

Použijeme tzv. Sarusovo pravidlo – 1. a 2. řádek napíšeme ještě pod schéma determinantu

a b c

d e f

g h i

a b c

d e f

Nyní zapíšeme do součinů všechny trojice prvků ve směru hlavní diagonály (těm patří znaménko +) a ve směru vedlejší diagonály (těm patří znaménko -):

aei + dhc + gbf – ceg – fha - ibd

To je hodnota našeho determinantu. Je vyjádřen pomocí 3! = 6 součinů

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | = | aei + dhc + gbf – ceg – fha - ibd |
| d | e | f | | |
| g | h | i | | |

Determinantům vyšších řádů se budeme věnovat až příště. Jen teď poznamenávám, že pro ně taková jednoduchá mnemotechnická pomůcka neexistuje. Sarusovo pravidlo je jen pro determinanty 3. řádu.