Určeno pro MUNDUS SYMBOLICUS 29 (2021)

Neomezená abundabilita

1. Úvod

V tomto článku volně navážeme na články [4] až [6]. V souladu s nimi zde bude

N_0 = {0, 1, 2, 3, ...} množina všech přirozených čísel (včetně nuly),

N = {1, 2, 3, ...} množina všech kladných přirozených čísel,

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...} množina všech prvočísel.

Symbolem | budeme označovat relaci "dělí" na N_0 (tedy $x|y$, právě když existuje takové $q \in N_0$, že $y = x.q$),

Relace *dělí* je uspořádáním[1] na N_0, tj. je reflexívní (pro všechna $x \in N_0$ platí $x|x$), antisymetrická (pro všechny uspořádané dvojice $(x, y) \in N_0^2$ platí implikace ($x|y \wedge y|x \Rightarrow x = y$)) a tranzitivní (pro všechny uspořádané trojice $(x, y, z) \in N_0^3$ platí implikace ($x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$)); nejmenším prvkem množiny N_0 uspořádané relací *dělí* je 1, největším je 0. Dále se budeme zabývat relací *dělí* omezenou na množinu N všech nenulových přirozených čísel, tam 1 zůstává nejmenším prvkem, zatímco největší prvek neexistuje.

V přirozeném uspořádání n-té prvočíslo budeme značit q_n,. tedy $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5$, ... , $q_7 = 17$, ... Součin počátečních n prvočísel nazveme **prvofaktoriálem** čísla n, budeme jej značit prfact(n);tedy

$$\mathrm{prfact}(n) = \Pi_{i=1}^{n} q_i.$$

Počet, resp. součet všech dělitelů přirozeného čísla x označíme T(x), resp. S(x). T i S jsou multiplikativní funkce, tj. pro libovolná dvě nesoudělná čísla x, y plati $T(xy) = T(x)T(y)$, $S(xy) = S(x) S(y)$. Pro čísla $x = p^n$, která jsou mocninami prvočísel, platí

$$T(x) = T(p^n) = n + 1 \qquad (1)$$

(dělitelé jsou $1 = p^0, p, ..., p^n$; vztah platí i pro $n = 0$),

[1] Někdy se takto definovaná relace nazývá částečným uspořádáním a pojem uspořádání (bez další specifikace) se používá na jeho speciální případ, kterým je lineární uspořádání. Množina N s běžným uspořádáním "je menší" je lineárně uspořádaná.

$S(x) = (p^{n+1} - 1)/(p - 1)$ (2)

(součet n + 1 členů geometrické posloupnosti s prvním členem rovným 1 a kvocientem p).

Z multiplikatinosti funkcí T a S plyne, že pro $x = (p_1\hat{}n_1).(p_2\hat{}n_2). \ldots . (p_M\hat{}n_M) = \Pi_{i=1}^{M} (p_i\hat{}_{Mi})$ platí[2]

$$T(x) = (n_1 + 1).(n_2 + 1)\ldots(n_M + 1) = \Pi_{i=1}^{M} (n_i + 1), \quad (3)$$

$$S(x) = \frac{(p_1\hat{}(n_1+1) -1).(p_2\hat{}(n_2+1) -1). \ldots . (p_M\hat{}(n_M+1) -1)}{(p_1 -1).(p_2 -1). \ldots . (p_M -1)} =$$

$$= \Pi_{i=1}^{M} (p_i\hat{}(n_i+1) -1)/ \Pi_{i=1}^{M} (p_i - 1). \quad (4)$$

V teorii přirozených čísel se setkáváme s pojmem *dokonalé číslo*. Číslo x se nazývá **dokonalé,** právě když $S(x) = 2x$. Dosud není známo žádné liché dokonalé číslo; je velmi pravděpodobné, že všechna dokonalá čísla jsou sudá. Každé sudé dokonalé číslo lze vyjádřit ve tvaru $2^{k-1}.(2^k - 1)$, kde druhý z činitelů je prvočíslo[3] . Dokonalá čísla jsou v množině všech přirozených čísel velice řídce rozložena; mezi přirozenými čísly, která lze binárně zapsat jako "long integer" (4 bajty) je jen pět dokonalých čísel, a to

6, 28, 496, 8 128 a 33 550 336.

Pojem dokonalého čísla inspiruje ke klasifikaci čísel podle vztahu mezi dvojnásobkem čísla a součtem jeho dělitelů. Přirozené číslo x nazýváme

deficientním, právě když S(x) < 2x,

dokonalým, právě když S(x) = 2x,

abundantním, právě když S(x) > 2x.

Mezi čísly nepřesahujícími 50 jsou abundantní

12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42 a 48,

---

[2] Abychom se vyhnuli indexům v exponentech, budeme v souladu s praxí v informatice mocninu a^b označovat pomocí infixového zápisu binární operace a^b; i při tomto zápise platí, že operace ^ má vyšší prioritu než běžné aritmetické operace.
[3] Jde o tzv. *Mersenovo prvočíslo*. Aby 2^k-1 bylo prvočíslo, je nutné, aby k bylo prvočíslo (není to však podmínka postačující, např. $2047 = 2^{11} - 1 = 23 * 89$).

dokonalá – jak už bylo zmíněno – jsou

6 a 28

a všechna ostatní jsou deficientní. Stojí za povšimnutí, že nejen uvedená dokonalá, ale i abundantní čísla jsou sudá. Lichá abundantní čísla existují, ale jsou v množině N velmi řídce rozložena (nejmenší je 945). Mezi přirozenými čísly z intervalu ⟨ 1; 1000⟩ jsou celkem 3 čísla dokonalá, 245 abundantních a 752 deficientních.

2. Abundabilita

Abundabilitou abu(x) čísla $x \in$ N rozumíme podíl S(x)/x:

abu(x) = S(x)/x

Platí tedy:

x je abundantní <==> abu(x) > 2,

x je dokonalé <==> abu(x) = 2,

x je deficientní <==> abu(x) < 2.

Abundabilita čísel nepřesahujících 1000 je uvedena na konci článku v tabulce 3.

Abundabilita je multiplikativní funkcí zobrazující množinu N do množiny R^+ všech kladných reálných čísel, přičemž pro všechna $x \in$ N platí abu(x) ≥ 1; abu(x) = 1, právě když x = 1. Multiplikativnost abundability plyne z multiplikativnosti funkce S.

Je-li p prvočíslo, jsou jedinými jeho děliteli p a 1, tedy

$$S(p) = p + 1, \qquad (5)$$

$$\mathrm{abu}(p) = (p + 1)/p = 1 + 1/p, \qquad (6)$$

a tedy

$$\lim_{p\to\infty, p\in P} \mathrm{abu}(p) = 1. \qquad (7)$$

Ze vztahu (6) okamžitě plyne **věta 1**: *Pro každé prvočíslo p platí* abu*(p)* ≤ 3/2 *. Funkce* abu *je na množině* P *klesající*.

Pro abundabilitu mocnin prvočísel ze vztahu (Ab) plyne:

$$\mathrm{abu}(p^n) = (p^{n+1} - 1) / (p^{n+1} - p^n) = (1 - 1/p^{n+1})/(1 - 1/p); \qquad (8)$$

z posledního vyjádření abundability mocniny prvočísla vyplývá **věta 2:** *Pro dané prvočíslo p je abundabilita mocniny p^n rostoucí funkcí exponentu n*.

Limitní abundabilitou prvočísla p nazveme limitu

$$\mathrm{abu}_\infty(p) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{abu}(p^n) = p/(p-1) = 1 + 1/(p - 1).$$

Limitní abundabilta mocniny prvočísla p je klesající funkcí na množině P;

$$\mathrm{abu}_\infty(2) = 2, \qquad (9)$$

$$\lim_{p\to\infty, p\in P} \mathrm{abu}_\infty(p) = 1. \qquad (10)$$

Ze vztahu (8) a z věty 2 okamžitě plyne **věta 3:** *Pro libovolné $p \in$ P a libovolné $n \in$ N platí*

$$1 + 1/p \le \mathrm{abu}(p^n) < 1 + 1/(p - 1) \qquad (11)$$

V tabulce 1 jsou pro prvočísla $p \le 40$ a exponenty $n \le 12$ uvedeny hodnoty $\mathrm{abu}(p^n)$ a limitní hodnota $\mathrm{abu}_\infty(p)$. Hodnoty jsou zaokrouhleny na 3 desetinná místa. Z tabulky je patrno, že v rozkladu čísla na prvočinitele u prvočinitelů větších než 3 hodnota exponentů přesahující 3 se do abundability promítá jen velice málo.

3. Abundabilita jako izotónní zobrazení

Věta 4. *Nechť $x \in$ N, $y \in$ N. Jestliže $x|y$, pak* abu*$(x) \le$* abu*(y). Jestliže*

$$x|y \wedge x \neq y,$$

pak

$$\mathrm{abu}(x) < \mathrm{abu}(y).$$

Zobrazení abu *je tedy izotónním zobrazením uspořádané množiny (*N, |*) do lineárně uspořádané množiny (*N,≤*).*

Důkaz. Na prvočíselný rozklad čísel x a y aplikujeme věty 1 a 2.

Důsledek: *Nechť $x, y \in$ N. Nechť číslo x je dokonalé nebo abundantní, $x|y$, $x \neq y$. Pak číslo y je abundantní.*

Tabulka 1

		n												
	p^*n*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	limitní
	2	1,500	1,750	1,875	1,938	1,969	1,984	1,992	1,996	1,998	1,999	2,000	2,000	2,000
	3	1,333	1,444	1,481	1,494	1,498	1,499	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500
	5	1,200	1,240	1,248	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250
	7	1,143	1,163	1,166	1,167	1,167	1,167	1,167	1,167	1,167	1,167	1,167	1,167	1,167
	11	1,091	1,099	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100
p	13	1,077	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083	1,083
	17	1,059	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,062	1,063	1,063	1,063
	19	1,053	1,055	1,056	1,056	1,056	1,056	1,056	1,056	1,056	1,056	1,056	1,056	1,056
	23	1,043	1,045	1,045	1,045	1,045	1,045	1,045	1,045	1,045	1,045	1,045	1,045	1,045
	29	1,034	1,036	1,036	1,036	1,036	1,036	1,036	1,036	1,036	1,036	1,036	1,036	1,036
	31	1,032	1,033	1,033	1,033	1,033	1,033	1,033	1,033	1,033	1,033	1,033	1,033	1,033
	37	1,027	1,028	1,028	1,028	1,028	1,028	1,028	1,028	1,028	1,028	1,028	1,028	1,028

4. Abundabilita čísel s několika prvočíselnými děliteli

Věta 5. *Nechť* $x = \Pi_{i=1}^{M}\ (p_i{}^\wedge n_i)$. *Pak*

$$\mathrm{abu}\,(x) = \Pi_{i=1}^{M}\ (1 - 1/p_i{}^\wedge(n_i+1))\ /\ \Pi_{i=1}^{M}\,(1 - 1/p_i). \qquad (12)$$

Věta je důsledkem multiplikativnosti abundability.

Číslo, které má jediného prvočíselného dělitele, je vždy deficientní, jeho abundabilita je menší než 2. Nutná podmínka, aby číslo *x* bylo abundantní, tedy je, že v jeho prvočíselném rozkladu jsou aspoň dvě prvočísla. Jedním z těchto dvou prvočísel musí být 2; abundabilita lichého čísla dělitelného právě dvěma prvočísly je totiž shora omezená číslem abu_∞ (3). abu_∞ (5) = 1,875. Abundabilita lichého čísla dělitelného třemi prvočísly může hodnotu 2 přesáhnout. Již jsme zmínili, že nejmenší liché abundantní číslo je 945 = $3^3.5.7$; abu(945) = 1,481 . 1,2 . 1,143 = 2,031. Další lichá abundantní čísla jsou 1575 = $3^2 . 5^2 . 7$, 2205 = $3^2 . 5 . 7^2$. Nejmenším lichým abundantním číslem, které není dělitelné 3, je 5 391 411 025 = 5^2.7.11.13.17.19.23.29. Je vidět, že lichá abundantní čísla jsou skutečně v množině N velice řídce rozložena.

Z toho, že abundabilita mocniny provočísla je rostoucí funkcí exponentu, plyne **věta 6:** *Nechť p_1, p_2, ..., p_M jsou pevně zvolená prvočísla, $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, a n_1, n_2, ..., n_M libovolná nenulová přirozená čísla. Pak*

$$\text{abu} \prod_{i=1}^{M} p_i\hat{}\, n_i < \prod_{i=1}^{M} \text{abu}_\infty(p_i). \qquad (13)$$

Odtud s použitím vět 1 a 2 okamžitě plyne **věta 7:**

Jestliže v prvočíselném rozkladu čísla M se vyskytuje nejvýše n různých činitelů, pak

$$\text{abu}(M) < \text{abu}_\infty(q_1) \,.\, \text{abu}_\infty(q_2) \,.\, \ldots \,.\, \text{abu}_\infty(q_n). \qquad (14)$$

Součin na pravé straně nerovnosti (14) označme limabu(n); větu 7 pak můžeme vyjádřit takto: *Jestliže v prvočíselném rozkladu čísla M se vyskytuje nejvýše n různých činitelů, pak*

$$\text{abu}(M) < \text{limabu}(n). \qquad (15)$$

5. Množina hodnot abundability

Protože množina P je nekonečná, je bod 1 = abu(1) = $\lim_{p\to\infty,\, p\in P}$ abu(p) hromadným bodem množiny $\mathcal{H}$(abu) hodnot funkce abu. Protože pro všechna $x \in$ N je abu (x) ≥ 1, platí

$$\inf_{x\in N}(\mathcal{H}(\text{abu}(x)) = \min_{x\in N}(\mathcal{H}(\text{abu}(x)) = 1. \qquad (16)$$

Jak jeho název naznačuje, předmětem článku je především opačný konec spektra hodnot abundability.

Věta 8. *Platí*

$$\sup_{x\in N}(\mathcal{H}(\text{abu}(x)) = \lim\sup_{x\in N} \text{abu}(x) = \infty. \qquad (17)$$

Důkaz. Je známo, že řada tvořená převrácenými hodnotami prvočísel diverguje, tj.

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} 1/q_i = \infty \qquad (18)$$

(jde o silnější tvrzení, než je obdobné tvrzení o součtu členů harmonické řady). Pro nekonečný součin abundability prvočísel tedy platí

$$\Pi_{i=1}^{\infty}\ \mathrm{abu}(q_i) = \Pi_{i=1}^{\infty}\ (1 + 1/q_i) = 1 + \Sigma_i 1/q_i + \Sigma_{i,j} 1/(q_i q_j) + \ldots \geq$$

$$\geq \Sigma_{i=1}^{\infty} 1/q_i = \infty. \qquad (19)$$

Pro libovolné kladné číslo K tedy můžeme vybrat takovou podmnožin $P(K)$ prvočísel, že bude platit

$$\Pi_{j\in P(K)}\ \mathrm{abu}(j) > K. \qquad (20)$$

Dokázali jsme tak, že funkce abu není omezená, dokonce že není omezená ani na vlastní podmnožině Nb ⊂ N, tvořené všemi bezčtvercovými přirozenými čísly, tj. takovými, která nejsou dělitelná druhou mocninou žádného prvočísla.

6. Abundabilita přesahující danou hodnotu

Věta 8 po prohlédnutí tabulky 3, umístěné na konci článku a obsahující hodnoty abunadability dokonalých a abundantních čísel nepřesahujících hodnotu 1000 (podrobnější informace o těchto číslech jsou v tabulce v čl. [5]), může vypadat hodně překvapivě. Mezi dvojcifernými čísly mají všechna abundabilitu menší než 3, mezi čísly nepřeahujícími 1000 mají všechna abundabilitu menší než 4 a jen u 16 z nich je abundabilita větší nebo rovna 3. Nejmenší číslo, jehož abundabilita není menší než 4, je pěticiferné číslo 27 720:

$$\mathrm{abu}(27\ 720) = \mathrm{abu}(2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11) = 4{,}052.$$

Pro zajímavost uveďme, že

$$\mathrm{abu}(30240) = \mathrm{abu}\ (2^5 \,.\, 3^3 \,.\, 5 \,.\, 7)= 4.$$

Nejmenší čísla, jejichž abundabilita je aspoň 5, resp. aspoň 6 jsou devíticiferné číslo 122 522 400, resp. patnácticiferné číslo 144 403 552 893 600:

$$\mathrm{abu}(122\ 522\ 400) = \mathrm{abu}\ (2^5 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 17) = 5{,}0130,$$

$$\mathrm{abu}(144\ 403\ 552\ 893\ 600) =$$

$$= \mathrm{abu}\ (2^5 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 17 \,.\, 19 \,.\, 23 \,.\, 29 \,.\, 31) = 6{,}031.$$

Na konci oddílu 4 jsme zavedli rostoucí funkci limabu(n), definovanou na množině na nenulových přirozených čísel a přiřazující číslu n součin limitních abundabilit prvočísel $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, …, q_n. Popsat přehledně množinu $\mathcal{H}$(limabu) jejích hodnot jednoduše nelze; proto nebudeme definovat přímo inverzní funkci k ní, nýbrž pro všechna $t \geq 2$ položíme[4]

$$\mathrm{invlimabu}\,(t) = \min\,\{n;\ \mathrm{limabu}(n) \geq t\};$$

funkce invlimabu je neklesající. Pro $n \leq 30$ (tj. $t \leq 8$) můžeme k určení jejích hodnot použít tabulku 2. Hodnoty t jsou v jejím posledním sloupci, přičemž k určení invlimabu (t) pro $t \in$ N slouží tučně zvýrazněné řádky.

Naskýtá se otázka, jak velké musí být číslo x, aby jeho abundabilta byla větší nebo rovna danému číslu $K \geq 2$. Uvažujme libovolné číslo x, v jehož prvočíselném rozkladu se vyskytuje právě n různých prvočísel; podle věty 7 platí nerovnost abu (x) < limabu (n). Má-li tedy platit abu(x) $\geq K$, musí pro počet M prvočísel v prvočíselném rozkladu čísla x platit limabu (M) $\geq K$, tedy $M \geq$ limabu(K). Nejmenší z čísel splňujících tuto podmínku je m = invlimabu(K). Nejmenší číslo, které má v prvočíselném rozkladu m různých prvočísel, je prfact (m). Platí tedy **věta 9:**

Nechť K je libovolné přirozené číslo větší nebo rovno 2. Pro každé přirozené číslo x z nerovnosti

$$\mathrm{abu}(x) \geq K$$

plyne nerovnost

$$x \geq \mathrm{prfact}(\mathrm{invlimabu}\,(K)). \qquad (21)$$

K ilustraci použijeme tabulku 2. Ukážeme, že má-li pro nějaké číslo x platit abu (x) ≥ 5, musí x splňovat nerovnost $x \geq 30\,030$. Z tabulky vyčteme že invlimabu(5) = 6, a tedy skutečně $x \geq$ prfact(6) = 30 030.

Podobně pomocí tabulky 2 zjistíme, že každé číslo v, resp. w jehož abundabilita přesahuje 7, resp. 8, musí splňovat nerovnosti

$$v > \mathrm{prfact}(14) \approx 1{,}308 \,.\, 10^{16},$$

resp.

$$w > \mathrm{prfact}(22) \approx 3{,}218 \,.\, 10^{30}$$

[4] Definice limabu(t) má smysl pro všechna reálná čísla $t \geq 2$; my se však zaměříme jen na hodnoty $t \in$ N

Nejmenšími čísly s abundabilitou aspoň 7, resp. 8, a majícími v prvočíselném rozkladu 14, resp. 22 prvočísel, jsou čísla

$v_0 = 2^{10} . 3^6 . 5^4 . 7^2 . 11^2 . 13^2 . 17^2 . 19^2 . 23^2 . 29^2 . 31^2 . 37. 41 . 43 \approx 1,36 . 10^{33}$,

resp.

$w_0 = 2^{11} . 3^6 . 5^4 . 7^3 . 11^2 . \dots . 59^2 . 61 . 67 . 71 . 73 . 79) \approx 4,49.10^{58}$.

(symbol "..." zde znamená "doplnit *druhými mocninami prvočísel* z daného intervalu")

Platí: abu(v_0) = 7, 002, abu(w_0) = 8,001

Čísla v_0 i w_0 splňují nerovnost (21).

Lze najít i menší čísla s požadovanou abundabilitou, v jejichž prvočíselném rozkladu se ovšem vyskytuje více prvočinitelů, např.

$v_1 = 2^6 . 3^4 . 5^3 . 7^2 . 11 . 13 . 17 . 19 . 23 . 29 . 31 . 37. 41 . 43 . 47 . 53 \approx 4,93.10^{24}$,

abu (v_1) = 7,034,

$v_2 = 2^{10} . 3^5 . 5^2 . 7^2 . 11^2 . 13^2 . 17 . 19 . 23 . 29 . 31 . 37. 41 . 43 . 47) \approx 1,28.10^{26}$,

abu (v_2) = 7,020,

$w_1 = 2^6 . 3^4 . 5^3 . 7^2 . 11 . \dots . 101 \approx 3,52.10^{43}$,

(zde symbol "..." znamená "doplnit *prvočísly* z daného intervalu"),

abu (w_1) = 8,02.

V prvočíselném rozkladu čísel v_1, v_2 a w_1 se sice vyskytuje více prvočinitelů než invlimabu(7), resp. invlimabu(8), ale nerovnost (21) z věty 9 splňují.

7. Závěr

Autor doufá, že úvahy o abundabilitě snad aspoň někomu přišly zajímavé, ale asi se čtenáři shodnou na tom, že k nějakým praktickým aplikacím mají hodně daleko. Podobný názor platil ještě v polovině minulého století o teorii přirozených čísel obecně. Významný anglický matematik G.H.Hardy si ji právě pro její domnělou neaplikovatelnost velice oblíbil. Uplynulo však pár desetiletí, a teorie přirozených čísel se stala základem sofistikovaných šifrovacích metod. Bez matematických partií, které před nějakými 70 lety se zdály neaplikovatelné,. bychom neměli platební karty ani internetové bankovnictví.

Abundabilita jako taková zatím do světa aplikací nezasahuje (aspoň pokud je autorovi známo). Pro matematika – formalistu by článek mohl skončit konstatováním, že obor hodnot funkce abu, definované na množině N, je neomezený. Matematik – konstruktivista je zvyklý na mnohé pozoruhodnější skutečnosti z oblasti přirozených čísel, nicméně jeho svět v podstatě přirozenými čísly, resp. spočetnými množinami končí. Matematik – platonik, který přijímá matematické objekty jako objektivní realitu a pro něhož, volně řečeno, ke každému nekonečnu existuje nekonečno větší, zas může ono spočetné, přirozenočíselné nekonečno chápat jako něco příliš malého. Autor se za platonika považuje a má přirozená čísla rád, a tak si s uspokojením uvědomuje, jak úvahy o abundabilitě ukazují na bohatství množiny N (a tedy i celé množiny N_0).

Ukázali jsme, že má-li mít číslo abundabilitu aspoň 4, resp. 5, resp. 6, resp. 7, resp. 8, musí mít v desítkové soustavě aspoň 3, resp. 5, resp. 9, resp. 17, resp. 31 číslic; tuto podmínku splňují nejmenší čísla mající takovou abundabilitu, neboť mají v desítkové soustavě po řadě dokonce 5, 9, 17, 31, 59 číslic.

Abundabilta je funkce na N. Skutečnost, že nejmenší číslo, v němž je její hodnota aspoň 8, je v desítkové soustavě devětapadesáticiferným číslem, bude pro většinu těch, kdo k matematice nepřistupují jen formálně a nezúčastněně, podnětem k údivu a k vnitřnímu prožitku nesmírné bohatosti množiny všech přirozených čísel, navzdory tomu, že žádná nekonečná množina není menší než ona.

Bohatství matematiky lze prožívat i citem. Krása matematiky zasahuje do estetiky a zasahuje i do uměleckého vnímání skutečnosti. Připomíná to i text vytesaný do bledského pomníku velkého slovinského matematika a prvního rektora lublaňské university Josipa Plemelje: "Matematika je mi životní potřebou a uměleckým požitkem" [3] .

Tabulka 2

n	p=q_n	prfact(n)	abu(p)	abu_∞ (p)	limabu(n)
1	**2**	**2**	**1,500**	**2,000**	**2,000**
2	**3**	**6**	**1,333**	**1,500**	**3,000**
3	5	30	1,200	1,250	3,750
4	7	**210**	1,143	1,167	**4,375**
5	11	2 310	1,091	1,100	4,813
6	13	**30 030**	1,077	1,083	**5,214**
7	17	510 510	1,059	1,063	5,539
8	19	9 699 690	1,053	1,056	5,847
9	23	**223 092 870**	1,043	1,045	**6,113**
10	29	6 469 693 230	1,034	1,036	6,331
11	31	200 560 490 130	1,032	1,033	6,542
12	37	7 420 738 134 810	1,027	1,028	6,724
13	41	304 250 263 527 210	1,024	1,025	6,892
14	43	**1,30828E+16**	1,023	1,024	**7,056**
15	47	6,1489E+17	1,021	1,022	7,210
16	53	3,25892E+19	1,019	1,019	7,348
17	59	1,92276E+21	1,017	1,017	7,475
18	61	1,17288E+23	1,016	1,017	7,600
19	67	7,85832E+24	1,015	1,015	7,715
20	71	5,57941E+26	1,014	1,014	7,825
21	73	4,07297E+28	1,014	1,014	7,934
22	79	**3,21764E+30**	1,013	1,013	**8,035**
23	83	2,67065E+32	1,012	1,012	8,133
24	89	2,37687E+34	1,011	1,011	8,226
25	97	2,30557E+36	1,010	1,010	8,311
26	101	2,32862E+38	1,010	1,010	8,394
27	103	2,39848E+40	1,010	1,010	8,477
28	107	2,56638E+42	1,009	1,009	8,557
29	109	2,79735E+44	1,009	1,009	8,636
30	113	3,16101E+46	1,009	1,009	8,713

Tabulka 3

Číslo x	Abubilita
6	2
12	2,33
18	2,17
20	2,1
24	2,5
28	2
30	2,4
36	2,53
40	2,25
42	2,29
48	2,58
54	2,22
56	2,14
60	2,8
66	2,18
70	2,06
72	2,71
78	2,15
80	2,33
84	2,67
88	2,05
90	2,6
96	2,63
100	2,17
102	2,12
104	2,02
108	2,59
112	2,5
114	2,11
120	3
126	2,48
132	2,55
138	2,09
140	2,4
144	2,8
150	2,48
156	2,51
160	2,36
162	2,24
168	2,86
174	2,07
176	2,11

Číslo x	Abubilita
180	3,03
186	2,06
192	2,65
196	2,04
198	2,36
200	2,33
204	2,47
208	2,09
210	2,74
216	2,78
220	2,29
222	2,05
224	2,25
228	2,46
234	2,33
240	3,1
246	2,05
252	2,89
258	2,05
260	2,26
264	2,73
270	2,67
272	2,05
276	2,43
280	2,57
282	2,04
288	2,84
294	2,33
300	2,89
304	2,04
306	2,29
308	2,18
312	2,69
318	2,04
320	2,38
324	2,61
330	2,62
336	2,95
340	2,22
342	2,28
348	2,41
350	2,13

Číslo x	Abubilita
352	2,15
354	2,03
360	3,25
364	2,15
366	2,03
368	2,02
372	2,41
378	2,54
380	2,21
384	2,66
390	2,58
392	2,18
396	2,76
400	2,4
402	2,03
408	2,65
414	2,26
416	2,12
420	3,2
426	2,03
432	2,87
438	2,03
440	2,45
444	2,4
448	2,27
450	2,69
456	2,63
460	2,19
462	2,49
464	2
468	2,72
474	2,03
476	2,12
480	3,15
486	2,25
490	2,09
492	2,39
496	2
498	2,02
500	2,18
504	3,1
510	2,54

Tabulka 3 (pokračování)

Číslo x	Abubilita
516	2,39
520	2,42
522	2,24
528	2,82
532	2,11
534	2,02
540	3,11
544	2,08
546	2,46
550	2,03
552	2,61
558	2,24
560	2,66
564	2,38
570	2,53
572	2,06
576	2,87
580	2,17
582	2,02
588	2,71
594	2,42
600	3,1
606	2,02
608	2,07
612	2,68
616	2,34
618	2,02
620	2,17
624	2,78
630	2,97
636	2,38
640	2,39
642	2,02
644	2,09
648	2,8
650	2
654	2,02
660	3,05
666	2,23
672	3

Číslo x	Abubilita
680	2,38
684	2,66
690	2,5
696	2,59
700	2,48
702	2,39
704	2,16
708	2,37
714	2,42
720	3,36
726	2,2
728	2,31
732	2,37
736	2,05
738	2,22
740	2,16
744	2,58
748	2,02
750	2,5
756	2,96
760	2,37
762	2,02
768	2,66
770	2,24
774	2,22
780	3,02
784	2,25
786	2,02
792	2,95
798	2,41
800	2,44
804	2,37
810	2,69
812	2,07
816	2,74
820	2,15
822	2,01
828	2,64
832	2,14
834	2,01

Číslo x	Abubilita
840	3,43
846	2,21
852	2,37
858	2,35
860	2,15
864	2,92
868	2,06
870	2,48
876	2,37
880	2,54
882	2,52
888	2,568
894	2,01
896	2,28
900	3,13
906	2,01
910	2,22
912	2,72
918	2,35
920	2,35
924	2,91
928	2,04
930	2,48
936	2,92
940	2,14
942	2,01
945	2,03
948	2,36
954	2,21
960	3,18
966	2,39
968	2,06
972	2,62
978	2,01
980	2,44
984	2,56
990	2,84
992	2,03
996	2,36
1000	2,34

Literatura

[1] Gracián, E.: Prvočísla. Dlouhá řada do nekonečna. Praha, Dokořán 2017

[2] Křížek, M, Somer, L., Šolcová, A.: Kouzlo čísel. Praha, Academia 2009

[3] Nečas, J.: Životní potřeba a umělecký požitek. 140 let od narození Josipa Plemelje. MS 21, 2013.

[4] Nečas, J.: Some Remarks on Diagonal and Perfect Numbers. MS 23, 2015

[5] Nečas, J.: Abundantní čísla. MS 25, 2017

[6] Nečas, J.: Lichá abundantní čísla. MS 26, 2018

[7] du Sautoy, M.: Hudba prvočísel. Dvě století Riemannovy hypotézy. Praha, Argo – Dokořán 2019

[8] Sierpiński, W.: Arytmetyka Teoretyczna. Warszawa, PWN 1968.

RNDr. Jiří Nečas

JorgeMalTiempo@seznam.cz