Jde o první versi textu, s jehož publikováním nepočítám. *JNe*

Jednoduchý výpočet čísla π

Jiří Nečas

0. Úvod

Číslo π = 3,141592654… je v matematice důležitou konstantou. Toto iracionální číslo bylo ještě před příchodem počítačů vypočítáno na více než 1000 desetinných míst. V praxi ovšem běžně vystačíme s dvěma až čtyřmi desetinnými místy. Jak je ale lze vypočítat? Nelze pro ně najít nějaký "přesný vzoreček". Iracionální čísla jsou limity posloupností racionálních čísel, a tak k jeho výpočtu bude sloužit posloupnost, která k němu konverguje. Taková posloupnost může být posloupností částečných součtů či součinů, tedy součtem řady či nekonečným součinem. Metoda je tím efektivnější, čím je konvergence rychlejší. Ukážeme si dvě metody výpočtu pomocí řady (druhou z nich ve dvou variantách) a jednu pomocí nekonečného součinu. Při hodnocení metod využijeme toho, že π známe.

1. Maclaurinova[1] řada pro arctg

Nejjednodušší je využití toho, že

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots = \Sigma_{i=0}^{\infty} (-1)^i.1/(2i + 1), \qquad (1)$$

tedy

$$\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + 4/9 - \ldots = \Sigma_{i=0}^{\infty} (-1)^i.4/(2i + 1). \qquad (2)$$

Rovnost (1) je vyjádřením Maclaurinovy řady pro funkci arctg(x) v bodě x = 1:

$$\mathrm{arctg}(x) = \Sigma_{i=0}^{\infty} (-1)^i.x^i/(2i + 1). \qquad (3)$$

Je známo, že tg(π/4) = 1, tedy arctg(1) = π/4.

Vztah (2) je přesným vyjádřením čísla π, pro praxi se však nehodí kvůli velice pomalé konvergenci[2], sčítanci se blíží nule velice pomalu. Řada v něm je řadou s alternujícími členy, tedy se v ní pravidelně střídají součty větší než limita se součty menšími než limita, takže při postupném sčítání zužujeme interval, v němž hledaná limita leží. V případě takovéto řady, v níž absolutní hodnota po sobě jdoucích sčítanců klesá velmi pomalu, může k odhadu limity posloužit aritmetický (případně i jiný) průměr po sobě následujících součtů. Jako příklad uveďme, k jakým hodnotám vede využití n-tého a (n+1)-ního sčítance pro a) n = 10, b) n = 40 c) n = 100. Při tom zde n-tý součet označíme σ_n.

---

[1] Taylorova řada kolem nuly
[2] Tuto vlastnos však mají i další zde uváděné posloupnosti konvergující k π

a) $n = 10$	$\sigma_n = 3{,}041\ 84$	$\sigma_{n+1} = 3{,}232\ 32$	$(\sigma_n + \sigma_{n+1})/2 = 3{,}137\ 08$
Odchylka od π v %	3,18	2,89	0,144
b) $n = 40$	$\sigma_n = 3{,}116\ 60$	$\sigma_{n+1} = 3{,}165\ 98$	$\sigma_n + \sigma_{n+1} = 3{,}141\ 29$
Odchylka od π v %	0,796	0,776	0,009 7
c) $n = 100$	$\sigma_n = 3{,}131\ 59$	$\sigma_{n+1} = 3{,}151\ 49$	$(\sigma_n + \sigma_{n+1})/2 = 3{,}141\ 54$
Odchylka od π v %	0,318	0,315	0,001 58

Vidíme, že aritmetický průměr 10. a 11. členu je k hledané limitě blíže než 100. či 101. člen. Využití aritmetického průměru je užitečné v případě pomalu konvergujících řad.

Použít aritmetický průměr dvou po sobě jdoucích členů se ovšem nehodí při použití rychle konvergujících řad s alternujícími členy. Např. pokud budeme počítat číslo 1/e sčítáním Maclaurinovy řady pro exp (x) v bodě x = -1,

$$1/e = e^{-1} = \Sigma_{i=0}^{\infty}\ (-1)^i/i! \qquad (4)$$

při libovolném n se $(n+1)$-ní člen bude od určované limitní hodnoty lišit méně než průměr n-tého a $(n+1)$-ního členu.

2. ζ (2)

Poněkud rychleji se blíží k nule členy řady, která vyjadřuje hodnotu Riemannovy zeta funkce v bodě 2:

$$\zeta\,(2) = \Sigma_{i=1}^{\infty}\ 1/i^2 = \pi^2/6 \qquad (5)$$

Najít součet řady $\Sigma_{i=1}^{\infty}\ 1/i^2$, resp. ověřit platnost vztahu $\Sigma_{i=1}^{\infty}\ 1/i^2 = \pi^2/6$ není ovšem jednoduché. Jde o tzv. Basilejský problém, formulovaný Pietrem Mengolim roku 1650 a poté v Basileji Jacobem Bernoullim a vyřešený 1735 Leonardem Eulerem; ten postupně publikoval několik způsobů řešení. Naznačíme zde nejstarší, v němž je určitá nekorektnost, nicméně je myšlenkově zajímavý.

2.1. Basilejský problém[3]

Uvažujme nekonečný součin

$$s(y) = \Pi_{j=1}^{\infty} (1 - y/a_j). \tag{6}$$

Jde o "nekonečný polynom" v proměnné y. Po "roznásobení" koeficient u argumentu y bude

$$- \Sigma_{j=1}^{\infty}\ 1/a_j. \tag{7}$$

Množina všech nulových bodů funkce $s(y)$ je $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$

Poznamenejme, že pro vyšší mocniny y by koeficienty byly vyjádřeny násobným součtem (přes více indexů). Ty nás naštěstí nebudou zajímat.

Zabývejme se nyní nekonečným polynomem (řadou)

$$P(x) = 1 - x^2/3! + x^4/5! - \ldots = \Sigma_{n=0}^{\infty} x^{2n}/(2n+1)! = \sin x / x \tag{8}$$

Poslední rovnost je důsledkem známého Maclaurinova rozvoje funkce sin x. Kořeny (nulové body) polynomu P pak jsou právě všechny nenulové celočíselné násobky π.

Položme nyní

$$Q(x) = \Pi_{k=1}^{\infty} (1 - x/(k\pi))\ .\ (1 - x/(-k\pi)) = \Pi_{k=1}^{\infty} (1 - x^2/(k^2\pi^2)) \tag{9}$$

Nulové body součinu $Q(x)$ jsou také právě všechny nenulové celočíselné násobky π.

P i Q jsou nekonečné polynomy (tedy řady) se stejnými nulovými body i se stejným absolutním členem. Pro obyčejné polynomy by to znamenalo, že si jsou rovny. Dopusťme se určité nekorektnosti a zobecněme tvrzení o obyčejných polynomech i na tyto mocninné řady, tedy že platí $P = Q$. Protože nenulové koeficienty jsou jen u členů se sudou mocninou proměnné x, můžeme se na ně dívat jako na polynomy v proměnné x^2

Při vyjádření nekonečného součinu $\Pi_{k=1}^{\infty} (1 - x^2/(k^2\pi^2))$ ve tvaru součtu (řady) koeficient u první mocniny proměnné x^2 je

$$- \Sigma_{k=1}^{\infty} (1/(k^2\ \pi^2)) \tag{10}$$

Podle vztahu (8) je u x^2 koeficient -1/3!

Odtud

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} (1/(k^2\ \pi^2)) = 1/3! = 1/6 \tag{11}$$

Vynásobením obou stran π^2 dostaneme hledaný součet

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} (1/k^2\ ) = \pi^2/6. \tag{12}$$

---

[3] Viz [1]

2.2. π jako limita rostoucí posloupnosti částečných součtů řady pro ζ(2)

Vztah (12) lze využít k přibližnému výpočtu čísla π:

$$\pi = \sqrt{(6\Sigma_{k=1}^{\infty} (1/k^2))}. \tag{13}$$

Pomocí součtu řady budeme počítat $\pi^2/6$ a odtud vypočítáme π. Budeme opět počítat částečné součty

$$s_n = \Sigma_{k=1}^{n} (1/k^2) \tag{14}$$

pro a) n = 10, b) n = 40, c) n = 100.

Porovnáme je se známou hodnotou $\pi^2/6$ = 1,644 934 1. Posloupnost částečných součtů je rostoucí, a tedy nám neposkytuje pro π horní odhad.

n	s_n	$\sqrt{(6*s_n)}$	Relativní odchylka od π v %
10	1,549 77	3,049 36	2,935 8
40	1,620 24	3,117 93	0,753 3
100	1,634 98	3,132 08	0,302 9

2.3. π jako limita alternující posloupnosti částečných součtů

Nevýhodou předchozího postupu je je, že sčítáme řadu s kladnými členy, tedy posloupnost $a_n = \Sigma_{k=1}^{n} (1/k^2)$ částečných součtů je rostoucí, horní odhad hledané hodnoty tak nemáme k dispozici. Ze vztahu (13) lze ovšem snadno odvodit (viz odd. 2.4)

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(1/k^2) = \pi^2/12, \tag{15}$$

kde členy posloupnosti $b_n = \Sigma_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (1/k^2)$ konvergují k $\pi^2/12$ tak, že kolem této hodnoty oscilují, liché členy jsou větší než $\pi^2/12$, sudé menší. Místo posloupnosti b_n budeme pracovat s posloupností $c_n = \sqrt{(12*b_n)}$, jejíž limitou je π, přičemž i pro ni platí, že liché členy jsou větší než π, sudé menší. Použijeme-li k odhadu π dvě sousední hodnoty c_n, víme, že hledaná hodnota leží mezi nimi a jejich aritmetický průměr je pak velmi dobrým odhadem pro π. Opět zvolíme postupně a) n = 10, b) n = 40, c) n = 10 a použijeme n-tý a (n+1)ní člen.

n	c_n	c_{n+1}	$(c_n + c_{n+1})/2$
10	3,132 98	3,148 77	3,140 87
relat. chyba (v %)	0,274 2	0,228 3	0,023 0
40	3,141 01	3,142 15	3,141 58
relat. chyba (v %)	0,018 5	0,017 6	0,000 44
100	3,141498	3,141685	3,141592
relat. chyba (v %)	0,003 01	0,002 95	0,000 03

2.4. Odvození vztahu (15) ze vztahu (5)

Ze vztahu (5) vydělením 4 dostaneme

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} 1/(2i)^2 = \pi^2/24 \qquad (16)$$

Počítejme

$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(1/k^2) = 1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + 1/5^2 - 1/6^2 \dots =$

$= 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 \dots - 2*(1/2^2 + 1/4^2 + 1/6^2 \dots) =$

$= \Sigma_{i=1}^{\infty} 1/i^2 - 2*\Sigma_{i=1}^{\infty} 1/(2i)^2 = \pi^2 / 6 = 2* \pi^2 /24 = \pi^2 / 6 - \pi^2 /12 = \pi^2 /12.$

Součet alternující řady (15) je skutečně důsledkem součtu monotónní řady (5).

3. Wallisův nekonečný součin

Myšlenkově poměrně jednoduché je vyjádření čísla π pomocí nekonečného součinu[4]. Je zajímavé, že je zde využit místo řady nekonečný součin, nicméně podobně jako uvedené řady konverguje poměrně pomalu. Střídají se v něm činitelé[5] větší než 1 s činiteli menšími než 1, takže posloupnost částečných součinů kolem limitního π/2 osciluje. V takovémto případě budeme mluvit o *nekonečném součinu s alternujícími činiteli*.

Vyjdeme z vyjádření $\int_0^{\pi/2} \sin^k x \, dx$, přičemž z platnosti vztahu

$$\sin x \le 1 \quad \text{pro } x \in \langle 0, \pi/2 \rangle \qquad (17)$$

plyne, že pro $m < k$ a $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ platí

[4] O nekonečných součinech lze najít informaci v [2], kap. III, §7

[5] Po určitém váhání jsem se rozhodl substantivum *činitel* skloňovat podle vzoru *muž*, i když plně připouštím, že použití vzoru *stroj* je také možné, a možná i vhodnější

$\sin^m x \le \sin^k x,$ (18)

a tedy

$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \; dx \le I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k x \, dx,$
(19)

Integrály[6] vyjádříme rekurentně:

$I_0 = \pi/2, I_1 = 1,$ (20)

$I_{k+2} = [(k+1)/(k+2)] \; I_k$ (21)

Ze vztahů (20) a (21) je vidět, že ve vyjádření I_k pro sudý index k se π vyskytuje, zatímco pro lichý index k nikoli.

$I_2 = (1/2)\ \pi/2$ $I_3 = 2/3$

$I_4 = (3/4)(1/2)\ \pi/2$ $I_5 = (4/5).(2/3)$

$I_6 = (5/6)(3/4)(1/2)\ \pi/2$ $I_7 = (6/7)(4/5).(2/3)$

$I_{2k} = [((2k\text{-}1)(2k\text{-}3)\dots 3.1)/(2k(2k\text{-}2)(2k\text{-}4)\dots 4.2)].\pi/2$

$I_{2k+1} = (2k(2k\text{-}2)(2k\text{-}4)\dots 4.2)/((2k+1)(2k\text{-}1)(2k\text{-}3)\dots 3.1.$ (22)

Nerovnost

$I_{2k+1} \le \; I_{2k} \; \le \; I_{2k\text{-}1}$

tedy znamená, že

$((2k)(2k\text{-}2)(2k\text{-}4)\dots 4.2)/((2k+1)(2k\text{-}1)(2k\text{-}3)\dots 3.1 \le$

$[((2k\text{-}1)(2k\text{-}3)\dots 5.3.1)/(2k(2k\text{-}2)(2k\text{-}4)\dots 4.2)].\pi/2 \;\le$

$\le I_{2k\text{-}1} = ((2k\text{-}2)(2k\text{-}4)\dots 4.2)/(2k\text{-}1)(2k\text{-}3)\dots 3.1$ (23)

Vynásobme všechny tři členy nerovnosti (22) číslem

$[(2k)(2k\text{-}2)(2k\text{-}4)\dots 4.2]/[(2k\text{-}1)(2k\text{-}3)\dots 5.3.1].$

Dostaneme

$[(2k)(2k)(2k\text{-}2)(2k\text{-}2)\dots 4.4.2.2]/[(2k+1)(2k\text{-}1)(2k\text{-}1)(2k\text{-}3)\dots\ 5.3.3.1\le \pi/2 \le$

$\le [(2k)(2k\text{-}2)(2k\text{-}2)(2k\text{-}4)\dots 4.4.2.2)]/[(2k\text{-}1)(2k\text{-}1)(2k\text{-}3)\dots\ 5.3.3.1];$

jinak zapsáno

$[(2k)/(2k+1)].[(2k)/(2k\text{-}1)].[(2k\text{-}2)/(2k\text{-}1)].\ \dots\ .[4/5].[4/3].[2/3].[2/1]\le$

$\le \pi/2 \le[(2k)/(2k\text{-}1)].[(2k\text{-}2)/(2k\text{-}1)].\ \dots\ .[4/5].[4/3].[2/3].[2/1]$

---

[6] [3], kap. III, §5, př.2.

Položme

$$r_k = [k + (1-(-1)^k/2]/[k + (1+(-1)^k/2]$$

Pak výše uvedený vztah můžeme zapsat ve tvaru

$$r_{2k} \,.\, r_{2k-1} \,.\, r_{2k-2} \,.\, \dots \,.\, r_4 \,.\, r_3 \,.\, r_2 \,.\, r_1 \le \pi/2 \le \quad r_{2k-1} \,.\, r_{2k-2} \,.\, \dots \,.\, r_4 \,.\, r_3 \,.\, r_2 \,.\, r_1,$$

pomocí multiplikačních symbolů

$$\Pi_{j=1}^{2k}\ r_j \ \le \pi/2 \le \Pi_{j=1}^{2k-1}\ \ r_j \qquad (24)$$

Protože

$$\lim_{k\to\infty}\ r_k\ = 1, \qquad (25)$$

je

$$\lim_{k\to\infty}\ \Pi_{j=1}^{2k}\ r_j\ =\ \lim_{k\to\infty}\ \Pi_{j=1}^{2k-1}\,, \qquad (26)$$

a tedy (podle (24))

$$\pi/2 = \lim_{k\to\infty}\ \Pi_{j=1}^{2k}\ r_j\ = \lim_{k\to\infty}\ \Pi_{j=1}^{k}\ r_j\ = \Pi_{j=1}^{\infty}\ r_j\,, \qquad (27)$$

a tedy

$$\pi = 2\ \Pi_{j=1}^{\infty}\ r_j \qquad (28)$$

Jako odhad pro π použijeme dvojice po sobě následujících částečných součinů tohoto alternujícího nekonečného součinu pro n a n + 1,

$$d_n = 2\ \Pi_{j=1}^{n}\ r_j\ ,$$

přičemž opět položíme po řadě a) n = 10, b) n = 40, c) n = 100.

n	d_n	d_{n+1}	$(d_n + d_{n+1})/2$
10	3,002 18	3,275 10	3,138 64
relat. chyba (v %)	4,437 8	4,249 7	0,094 0
40	3,103 52	3,179 21	3,141 37
relat. chyba (v %)	1,212 0	1,197 5	0,007 3
100	3,126 08	3,157 03	3,141 56
relat. chyba (v %)	0,493 8	0,491 4	0,001 2

4. Porovnání metod

Získané výsledky ukazuje tento přehled: Tučně

Maclaurinova řada pro arctg

a) $n = 10$ $\sigma_n = 3{,}041\ 84$ $\sigma_{n+1} = 3{,}232\ 32$ $(\sigma_n + \sigma_{n+1})/2 = 3{,}137\ 08$
Odchylka od π v % 3,18 2,89 0,144

b) $n = 40$ $\sigma_n = 3{,}116\ 60$ $\sigma_{n+1} = 3{,}165\ 98$ $\sigma_n + \sigma_{n+1} =$ **3,141 29**
Odchylka od π v % 0,796 0,776 **0,009 7**

c) $n = 100$ $\sigma_n = 3{,}131\ 59$ $\sigma_{n+1} = 3{,}151\ 49$ $(\sigma_n + \sigma_{n+1})/2 =$ **3,141 54**
Odchylka od π v % 0,318 0,315 **0,001 58**

ζ (2)

n	s_n	$\sqrt{(6 * s_n)}$	Relativní odchylka od π v %
10	1,549 77	3,049 36	2,935 8
40	1,620 24	3,117 93	0,753 3
100	1,634 98	3,132 08	0,302 9

ζ (2) alternující

n	c_n	c_{n+1}	$(c_n + c_{n+1})/2$
10	3,132 98	3,148 77	3,140 87
relat. chyba (v %)	0,274 2	0,228 3	0,023 0
40	3,141 01	3,142 15	**3,141 58**
relat. chyba (v %)	0,018 5	0,017 6	**0,000 44**
100	**3,141498**	**3,141685**	**3,141592**
relat. chyba (v %)	**0,003 01**	**0,002 95**	**0,000 03**

Wallis

n	d_n	d_{n+1}	$(d_n + d_{n+1})/2$
10	3,002 18	3,275 10	3,138 64
relat. chyba (v %)	4,437 8	4,249 7	0,094 0
40	3,103 52	3,179 21	**3,141 37**
relat. chyba (v %)	1,212 0	1,197 5	**0,007 3**
100	3,126 08	3,157 03	**3,141 56**
relat. chyba (v %)	0,493 8	0,491 4	**0,001 2**

Tučně jsou vyznačeny výsledky, které se od hodnoty π liší méně než o 0,01 %. Ukazuje se, že pro přibližný výpočet je alternace sčítanců, resp. činitelů, velice užitečná. Pro hledanou limitu se při postupném výpočtu stále zužuje interval. K dobrému výsledku přispěje pak i použití aritmetického průměru dvou po sobě jsoucích částečných součtů, resp. součinů (v případě dostatečně pomalé konvergence).

Literatura:

[1] Haluza, J.: Basilejský problém devětkrát jinak. PMFA 67/2022, č.4, s. 201-222.

[2] Jarník, V.: Diferenciální počet II. Praha, Academia 1984.

[3] Jarník, V.: Integrální počet I. Praha, Academia 1984.

Praha 1.2.2023