Hodnoty Eulerovy funkce

1. Úvod. Pro každé přirozené číslo[1] n je definována Eulerova funkce $\varphi(n)$ jako počet přirozených čísel, která jsou menší nebo rovná číslu n a jsou s číslem n nesoudělná. Platí $\varphi(1) = 1$, pro libovolné prvočíslo p je $\varphi(p) = p - 1$. Pro každé přirozené číslo m s prvočíselným rozkladem[2]

$$m = p_1^{a} \,.\, \dots \,.\, p_r^{s} \tag{1}$$

je

$$\varphi(m) = (p_1 - 1)\, p_1^{a-1} \,.\, \dots \,.\, (p_r - 1)\, p_r^{s-1} \,. \tag{2}$$

Pro každé přirozené číslo $n > 2$ platí: $\varphi(n)$ je sudé číslo, které je menší než n. Eulerova funkce zřejmě není prostá. Množina $\mathscr{H}(\varphi)$ jejích hodnot je sjednocením množiny $\{1\}$ s vlastní podmnožinou[3] množiny všech sudých přirozených čísel. Protože φ není prostá funkce, neexistuje k ní inverzní funkce. Symbol $\varphi^{-1}(y)$ použijeme k označení množiny

$$\{x\, ;\ \varphi(x) = y\}.$$

Pokud $y \notin \mathscr{H}(\varphi)$, je $\varphi^{-1}(y) = \emptyset$. Ukážeme dále, že pro každé $y \in \mathcal{N}$ je $\varphi^{-1}(y)$ omezená množina v $\mathcal{N}$, a tedy je konečná.

V tomto článku se budeme odvolávat na posloupnost prvočísel v jejím přirozeném uspořádání: 2; 3; 5; 7; ... Pro i-té prvočíslo použijeme označení q_i, tedy $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, ..., $q_7 = 17$, ...

Pro všechna prvočísla v rozkladu (1) platí $p_i \geq q_i$.

2. Relativní Eulerova funkce. V článku [1] je definována *relativní Eulerova funkce* $\Phi(n) = \varphi(n)/n$. Její hodnoty závisejí jen na prvočíslech vyskytujících se v rozkladu čísla n; nejsou závislé na tom, v jaké mocnině se tam tato prvočísla vyskytují. Pro libovolné přirozené číslo m s prvočíselným rozkladem (1) platí

$$\Phi(m) = (1 - p_1^{-1}) \dots (1 - p_r^{-1}) \tag{3}$$

(exponenty a, …, s se ve vyjádření skutečně nevyskytují)[4].

---

[1] Pro účely tohoto článku budeme přirozenými čísly rozumět jen celá kladná čísla. Množinu všech takto chápaných přirozených čísel označíme $\mathcal{N}$.

[2] Budeme předpokládat, že $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ Je-li m prvočíslo, je $a = r = 1$, a tedy skutečně $\phi(m) = m - 1$.

[3] Platí $\{2; 4; 6; 8; 10; 12; 16; 18; 20; 24; 28; 30; 32; 36\} \subset \mathcal{H}(\phi)$; $\{14; 26; 34\} \cap \mathcal{H}(\varphi) = \emptyset$.

[4] Vyjádření (3) získáme vydělením pravých stran rovností (2) a (1).

3. Některé nerovnosti. Nechť $m, n \in \mathcal{N}$, $m < n$. Pak

$$0 \leq 1 - m^{-1} < 1 \qquad (4)$$

$$1 - m^{-1} < 1 - n^{-1} \qquad (5)$$

$1 - x^{-1}$ je tedy rostoucí funkce, zobrazující množinu $\mathcal{N}$ do intervalu (0; 1).

Ze vztahu (4) plyne, že pro libovolná $m, n \in \mathcal{N}$ platí

$$1 - m^{-1} > (1 - m^{-1})(1 - n^{-1}) \qquad (6)$$

4. Omezení hodnot relativní Eulerovy funkce.

Uvažujme přirozené číslo m s prvočíselným rozkladem (1). Hodnota Eulerovy funkce $\varphi(m)$ má vyjádření (2). Mezi čísly $p_i - 1$ může být nanejvýš jedno liché, a to 1 (pokud $p_1 = 2$). Ve součinu (2) je proto aspoň $r - 1$ sudých čísel, a tedy v prvočíselném rozkladu čísla $\varphi(m)$ je číslo 2 aspoň v mocnině $r - 1$. Platí tedy:

Nechť $k = \varphi(m)$. Nechť $s' = \max\{x ; 2^x \mid k\}$. Pak v prvočíselném rozkladu čísla m se vyskytuje nanejvýš s' různých lichých prvočinitelů, a tedy nanejvýš $s = s' + 1$ všech prvočinitelů. Pro číslo r z rozkladu (1) tedy platí $r \leq s$. Poznamenejme, že k určení hodnoty s je třeba znát k, kdežto číslo m znát třeba není.

Označme T(s) součin

$$\mathrm{T}(s) = (1 - q_1^{-1}) \dots (1 - q_s^{-1})$$

Platí $\mathrm{T}(s) \in (0; 1)$, a tedy $1/\mathrm{T}(s) \in (1; \infty)$, viz tab. 1.

Opakovaným použitím nerovností (5) a (6) dostaneme:

$$\Phi(m) = (1 - p_1^{-1}) \dots (1 - p_r^{-1}) \geq \mathrm{T}(r) \geq \mathrm{T}(s). \qquad (7)$$

Tedy

$$\Phi(m) = \varphi(m)/m \geq \mathrm{T}(s), \qquad (8)$$

odkud dostáváme

$$m \leq \varphi(m) \,.\, 1/\,\mathrm{T}(s). \qquad (9)$$

Označme $\varphi(m) = k$. Pro libovolné $n \in \varphi^{-1}(k)$ tedy platí

$$n \leq k \,.\, 1/\,\mathrm{T}(s(\mathrm{k})), \qquad (10)$$

a tedy

$$\max \varphi^{-1}(k) \leq k \,.\, 1/\,\mathrm{T}(s(k)). \qquad (11)$$

Ze vztahu (2) plyne, že pokud pro nějaké liché číslo y platí $y \in \varphi^{-1}(k)$, pak také $2.y \in \varphi^{-1}(k)$; pro každé $k \in \mathcal{H}(\varphi)$ tedy je max $\varphi^{-1}(k)$ vždy sudé číslo.

5. Množina hodnot Eulerovy funkce.

Na závěr věnujme pozornost množině $\mathcal{H}(\varphi)$ a jejímu rozložení v množině $\mathcal{N}$. Jak jsme se již zmínili, leží v ní jediné liché číslo, a to 1. Patří do ní všechna "prvočíselně pokrytá" sudá čísla, tj. taková sudá čísla $2t$, že $2t + 1$ je prvočíslo ($2t$ je hodnotou Eulerovy funkce pro toto prvočíslo). Z vyjádření (2) čísla s rozkladem (1) plyne:

Pokud je číslo k dvojnásobkem lichého prvočísla, $k = 2.p$, pak $k \in \mathcal{H}(\varphi)$ jen tehdy, je-li prvočíselně pokryté. Pokud má číslo k prvočíselný rozklad $2.p^r$, kde p je prvočíslo, $p > 3$, a $r \in \mathcal{N}$, pak $k \in \mathcal{H}(\varphi)$ jen tehdy, je-li prvočíselně pokryté. V těchto případech je $\varphi^{-1}(k) = \{2.p +1; 4.p +2\}$, resp. $\varphi^{-1}(k) = \{2.p^r +1; 4.p^r +2\}$.

Tabulka 2 uvádí čísla $k \in \mathcal{H}(\varphi)$, která jsou menší nebo rovna 60. Je v ní uveden jejich prvočíselný rozklad, přičemž prvočíselně pokrytá čísla tam jsou vyznačena tučně kurzívou. Jsou tam uvedeny i hodnoty $s(k)$, $1/\mathrm{T}(s)$, $k/\mathrm{T}(s)$ a výčtem prvků také množiny $\varphi^{-1}(k)$. Pro čísla $k \in \mathcal{H}(\varphi) \cap \{1; 2; ...; 59, 60\}$ je z tabulky 2 patrná platnost nerovnosti (11).

Literatura:

[1] Nečas, J.: Relativní Eulerova funkce. Mundus Symbolicus 25, 2017.

Praha, srpen a září 2020 (Psáno pro Mundus Symbolicus)

Tab. 1

s	q_s	T(s)	1/T(s)
1	2	0,500	2,000
2	3	0,333	3,000
3	5	0,267	3,750
4	7	0,229	4,375
5	11	0,208	4,813
6	13	0,192	5,214
7	17	0,181	5,539
8	19	0,171	5,847
9	23	0,164	6,113
10	29	0,158	6,331
11	31	0,153	6,542
12	37	0,149	6,724
13	41	0,145	6,892
14	43	0,142	7,056
15	47	0,139	7,210
16	53	0,136	7,348

Tab. 2

	Prvočíselný rozklad čísla k (mocnitele)											Množina $\varphi^{-1}(k)$									
k	2	3	5	7	11	13	23	29	$s(k)$	$1/\mathrm{T}(s)$	$k.1/\mathrm{T}(s)$										
1									1	2	2	1	2								
2	1								2	3	6	3	4	6							
4	2								3	3,75	15	5	8	10	12						
6	1	1							2	3	18	7	9	14	18						
8	3								4	4,375	35	15	16	20	24	30					
10	1		1						2	3	30	11	22								
12	2	1							3	3,75	45	13	21	26	28	36	42				
16	4								5	4,81	77	17	32	34	40	48	60				
18	1	2							2	3	54	19	27	38	54						
20	2		1						3	3,75	75	25	33	44	50	66					
22	1				1				2	3	66	23	46								
24	3	1							4	4,375	105	35	39	45	52	56	70	72	78	84	90
28	2			1					3	3,75	105	29	58								
30	1	1	1						2	3	90	31	62								
32	5								6	5,21	167	51	64	68	80	96	102	120			
36	2	2							3	3,75	135	37	57	63	74	76	108	114	126		
40	3		1						4	4,375	175	41	55	75	82	88	100	110	132		
42	1	1		1					2	3	126	43	49	86	98						
44	2				1				3	3,75	165	69	92	138							
46	1						1		2	3	138	47	94								
48	4	1							5	4,81	231	65	104	105	112	130	140	210			
52	2					1			3	3,75	195	53	106								
54	1	3							2	3	162	81	162								
56	3			1					4	4,375	245	87	116	154							
58	1							1	2	3	174	59	118								
60	2	1	1						3	3,75	225	61	77	93	99	122	124	154	186	198	