Exponenciální a logistický růst

Jiří Nečas

Mundus Symbolicus 19 (2011)

V tomto článku na dvou modelech růstu − exponenciálním a logistickém − ukážeme některé rozdíly mezi chováním spojitých a diskrétních systémů. Exponenciální model lze považovat za základní růstový model v neomezeném světě, logistický pak ve světě konečném, omezeném.

1. Exponenciální růst

1.1. Spojitý případ

Růstový zákon je vyjádřen diferenciální rovnicí

$$y' = k.y \quad (k > 0) \tag{A1}$$

Skutečnost, že se v rovnici (A1) nevyskytuje explicitně čas t, je důsledkem homogenity času. Přírůstek y' veličiny y je přímo úměrný její velikosti.

Obecné řešení rovnice (A1) je

$$y = C.\mathrm{e}^{kt} = C.\exp(kt) = C.(\exp k)^t = C.b^t, \tag{A2}$$

přičemž

$$C = y(0). \tag{A3}$$

Pro $k = 1$, $y(0) = 1$ dostáváme

$$y = \mathrm{e}^t = \exp t\,. \tag{A4}$$

1.2.Diskrétní případ

Diskrétní proměnnou budeme označovat n, místo spojité funkce $y(t)$ budeme studovat posloupnost y_n.

Při diskretizaci považujeme za analogii derivace diferenci při vzrůstu celočíselného argumentu o 1, $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. Je to zřejmě nejpřirozenější postup. Oproti derivaci zde zdůrazněme dva rozdíly:

a) derivace popisuje spojitou změnu. Věnujeme-li se rostoucím funkcím, bude se při růstu argumentu z hodnoty t na t+1 projevovat, že na intervalu $(t, t+1)$ funkce stále roste, a tedy má hodnoty větší než v bodě t. Naproti tom růst y_n posloupnosti je určen hodnotou v bodě n, a tedy bude pomalejší než růst funkce $y(t)$.

b) Derivace v diferenciální rovnici se chová symetricky vůči změně argumentu vpřed i zpět. Diference popisuje změnu argumentu vpřed.

Diferenční rovnice, které vyjadřují diferenci $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ jako funkci hodnoty y_n, budeme nazývat *diferenčními rovnicemi 1. druhu.*

Diferenciální rovnici (A1) tak odpovídá diferenční rovnice 1. druhu

$$\Delta y_n = k.y_n \quad (k>0) \qquad \text{(B1)}$$

Často se pracuje s diferenčními rovnicemi, které jsou rekurentním vyjádřením posloupnosti; v případě difеrečních rovnic 1. řádu tak jde o vyjádření (n+1)-ního členu y_{n+1} jako funkce n-tého členu y_n ; v tomto případě budeme mluvit o *diferenčních rovnicích 2. druhu.* Z rovnice (B1) tak přejdeme k rovnici

$$y_{n+1} = (1+k).y_n\,, \qquad \text{(B2)}$$

tedy

$$y_{n+1} = r.y_n\,, \qquad \text{(B3)}$$

kde $r = k + 1$

Pravá strana rovnice (B1) při vyjádření prvního druhu a rovnice (B3) (popř. (B2)) při vyjádření druhého druhu má stejný tvar. Tato skutečnost je důsledkem toho, že jde o rovnice lineární (lineární je i diferenciální rovnice (A1))

Řešení je

$$y_n = C.r^n = C.(1+k)^n\,, \qquad \text{(B4)}$$

přičemž

$$C = y_0. \qquad \text{(B5)}$$

Pro k = 1 (tedy r = 2), y_0 = 1 je

$$y_n = 2^n \qquad \text{(B6)}$$

V souladu s úvahou (a) v úvodu k odd. 1.2 je zde při stejné hodnotě konstanty v analogických rovnicích (A1), (B1) růst pomalejší; ve spojitém případě je vyjádřen exponenciálou se základem e, v diskrétním se základem 2.

2. Logistický růst

2.1. Spojitý případ

Růst probíhá "na úkor" systémového okolí U, tedy přírůstek y' je přímo úměrný jednak sledované veličině y, jednak velikosti $U - y$ tohoto okolí, které se s růstem y zmenšuje; tento efekt se neprojeví, pokud $y << U$. Diferenciální rovnice logistického růstu má tedy tvar

$$y' = a.y(U - y) \qquad (a > 0) \qquad \text{(C1)}$$

Předpokládá se při tom, že počáteční hodnota $y(0)$ leží v intervalu $(0, U)$, který je oborem hodnot řešení, přičemž pro $t < 0$ je $y(t) \in (0, y(0))$, pro $t > 0$ pak je $y(t) \in (y(0), U)$.

Logistický růst pro malé hodnoty argumentu, tedy při $y << U$, "splývá" s exponenciálním růstem; pokud však již y nelze vůči "mezi růstu" U zanedbat, dochází k zpomalování růstu, při $t \to \infty$ se hodnota y zdola blíží limitní hodnotě U.

Rovnici (C1) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$y' = (k/U).y.(U - y) = k.y.(1 - y/U), \qquad \text{(C2)}$$

kde je označení voleno tak, aby pro $y << U$ rovnice logistického růstu korespondovala s rovnicí exponenciálního růstu.

Zdůrazněme, že rovnice logistického růstu již lineární není, což přinese určité komplikace při přechodu k diskrétnímu případu.

Separací proměnných získáme řešení (je jím tzv. *logistická funkce*):

$$y = U.C.\exp(kt)/(1 + C.\exp(kt)) = U.C.\exp(aUt)/(1 + C.\exp(aUt)), \qquad \text{(C3)}$$

které s použitím identity [1]

$$C.\exp x \,/\, (1 + C.\exp x) = (\mathrm{tgh}\,((x - \ln C) / 2) + 1) / 2 \qquad \text{(C4)}$$

můžeme vyjádřit ve tvaru

$$y = U\,(\mathrm{tgh}\,((aUt - \ln C) / 2) + 1) / 2. \qquad \text{(C5)}$$

Konstanta C je určena počáteční podmínkou takto:

$$C = y(0)/(U - y(0)). \qquad \text{(C6)}$$

[1] Mezi logistickou funkcí a funkcí tgh je tedy jednoduchý lineární vztah; jejich grafy jsou geometricky podobné křivky.

Změna měřítka - normalizace

Popis logistického růstu se zjednoduší, zavedeme-li normalizovanou proměnnou

$$z = y / U \tag{C10}$$

Jednotlivé výše uvedené vztahy pak získají tvar

$$z' = a.U.z(1 - z), \tag{C11}$$

$$z' = k.z(1 - z), \tag{C12}$$

$$z = C.\exp(kt)/(1 + C.\exp(kt)) = C.\exp(aUt)/(1 + C.\exp(aUt)). \tag{C13}$$

Pro proměnnou z platí $z \in (0, 1)$.

2.2. Diskrétní případ

<u>*2.2.1 Kauzální varianta*</u>

Diskrétnímu logistickému růstu se budeme věnovat podrobněji. Pro jednoduchost vyjdeme od spojitého případu s normalizovanou proměnnou z. Diferenční rovnici prvního druhu získáme pomocí vyjádření (C12):

$$\Delta z_n = k.z_n(1 - z_n). \tag{D1}$$

Jí odpovídá vyjádření druhého druhu

$$z_{n+1} = z_n(1 + k - k.z_n) = k.z_n.(1 + k^{-1} - z_n). \tag{D2}$$

V tabulce (na konci článku) jsou uvedeny hodnoty z_n pro tři různé počáteční hodnoty z_0 (z_0 = 0,2, z_0 = 0,5, z_0 = 0,8) a pro vybrané hodnoty koeficientu k. Je z ní patrno, že pro $k < 2$ se hodnoty z_n blíží limitní hodnotě 1, což je v souladu s normalizovaným spojitým případem.

Pro $k \geq 2$ se však setkáváme s tím, že hodnoty z_n předpokládanou limitní hodnotu 1 překračují. Ve spojitém případě činitel $(1 - z)$ (resp. $(U - y)$) kontinuálně zajišťuje brzdění růstu. V diskrétním případě při velkém koeficientu růstu poslední hodnota před překročením meze může být tak blízko k mezní hodnotě 1, že rozdíl nestačí k tomu, aby zabránila překročení meze v dalším kroku. Než přistoupíme k určitému "teleologickému" postupu promítnutí této skutečnosti do formulace diferenční rovnice korespondující s diferenciální rovnicí spojitého logistického růstu, zastavme se u poněkud jiné diferenční rovnice, která bývá v literatuře obvykle nazývána *diferenční logistickou rovnicí.*

Jde o diferenční rovnici druhého druhu[2], v níž je (n+1)-ní člen vyjádřen stejně, jako v rovnici (D1) je vyjádřena diference, tedy

$$z_{n+1} = r.z_n(1 - z_n), \tag{E1}$$

[2] Spojitý případ odpovídající této rovnici je řešen v dodatku (kap. 4).

kde $r \in (1, 4)$. Pro $r \in (1, 3>$ má posloupnost z_n limitu (tedy jediný hromadný bod) $1 - r^{-1}$, pro $r \in (3, 1+6^{1/2}>$ ($1+6^{1/2} \approx 3,4995$) má posloupnost hromadné body dva, kolem nichž se hodnoty pro velká n střídavě pohybují, za koncovým bodem tohoto intervalu se hodnoty posloupnosti pohybují periodicky kolem 4 hromadných bodů, dále pak trajektorie posloupnosti bifurkuuje pro $k \approx 3,5441$ a osciluje kolem 8 hromadných bodů. Nechť n-tý bifurkační bod je a_n, počet hromadných bodů se v něm mění z 2^{n-1} na 2^n. Platí

$$\lim ((a_{n+1} - a_n)/(a_{n+2} - a_{n+1})) = \delta,$$

kde

$$\delta = 4,669\,201\,609\,102\,990\,671\,853\,203\,82\ldots$$

je universální *Feigenbaumova konstanta* [Scott].

Posloupnost bifurkačních bodů má limitu:

$$a_\infty = \lim a_n \approx 3,569946$$

Pro $r > a_\infty$ je limitní chování posloupnosti chaotické.

2.2.2 Teleologická varianta

Zpomalovací faktor $(1 - z)$ působí ve spojitém modelu bezprostředně, okamžitě, což zaručuje, že rostoucí veličina nepřekročí limitní hodnotu, která je v normalizovaném modelu rovna 1. V diskrétním případě (D1, D2) se nepřekročitelnost limitní hodnoty uplatňuje jen do určité maximální hodnoty parametru, vyjadřujícího rychlost růstu.

Rovnice (C12) je invariantní vůči obrácení času; musíme však v tomto případě zaměnit z a $(1 - z)$. Spojitý případ tedy projevuje symetrii minulosti a budoucnosti. V diskrétním případě, k němuž jsme dospěli od spojitého standardním postupem, tomu tak není. Nejjednodušší způsob, jak takovou symetrii mezi minulostí a budoucností získat, je při diskretizaci rovnice (C12) vztáhnout hodnotu rostoucí veličiny z v "brzdicím" faktoru $(1 - z)$ k časovému okamžiku po změně (kvůli závislosti změny na *budoucím* okamžiku mluvíme o *teleologické variantě*):

$$\Delta z_n = z_{n+1} - z_n = k.z_n(1 - z_{n+1}), \tag{F1}$$

odkud

$$z_{n+1} = z_n + k.z_n.(1 - z_{n+1}), \tag{F2}$$

a tedy

$$z_{n+1} = (1 + k).z_n/(1 + k.z_n) \tag{F3}$$

Snadno se dokáže, že z předpokladu $0 < z_n < 1$ plyne

$$z_n < z_{n+1} < 1, \tag{F4}$$

a (např. pomocí substituce $z_n = 1 - u_n$)

$$\lim z_n = 1, \tag{F5}$$

a to pro libovolnou počáteční hodnou $z_0 \in (0, 1)$ a libovolnou kladnou konstantu k.

Teleologická diskretizace tak velice dobře odpovídá spojitému případu.

3. Porovnání diskrétních a spojitých případů

Spojitý a diskrétní růst probíhá obdobně, pokud není "příliš" rychlý. Od určité hraniční hodnoty parametru charakterizujícího rychlost růstu však jejich podobnost (v kauzální variantě) končí. Zatímco limitní chování spojitého systému se s růstem parametru nemění, hodnoty v diskrétním případě po dosažení určité hraniční hodnoty parametru přestávají směřovat k jednomu limitnímu bodu, nýbrž se periodicky pohybují mezi několika hromadnými body (jejich počet roste a je vždy mocninou čísla 2), až se limitní chování stane chaotickým.

Tato skutečnost ukazuje na riziko, s nímž je případná záměna spojitého a diskrétního systému spojena. V historii našeho poznání sehrála velkou roli analýza záření černého tělesa, kde se podařilo teoreticky vypočítanou "ultrafialovou katastrofu" odstranit předpokladem o kvantování energie, čímž se otevřely dveře kvantové fyzice. Předpoklad o kvantování energie znamená diskretizaci jejích možných hodnot. Na druhou stranu dnes se "digitalizuje", čili diskretizuje kde co. Nelze při tom zapomínat na to, že *diskrétní systém se může chovat jinak než obdobný spojitý systém*. Přitom ovšem chování spojitých systémů bývá jednodušší, *spojitost znamená velice silnou informaci*.

4. Dodatek

Diferenční rovnici (E1) odpovídá rovnice 1. druhu

$$\Delta z_n = (r - 1)\, z_n - r\, z_n^2 . \tag{H1}$$

Ta je obdobou diferenciální rovnice

$$z' = r.z((1-r^{-1}) - z), \tag{H2}$$

jejíž řešení je

$$z = (1 - r^{-1}).C.exp(rt)/(1 + C.exp(rt)), \tag{H3}$$

které se velice podobá řešení (C13) logistické rovnice (C12); na rozdíl od něho se zde vyskytuje faktor $1\text{-}r^{-1}$, takže limitní hodnota pro $t \to \infty$ je $1-r^{-1}$. Přitom předpokládáme, že počáteční hodnota leží v intervalu $(0, 1-r^{-1})$. Na r ve spojitém případě klademe jen podmínku $r > 1$.

Literatura

SCOTT, ALWYN C.: *The Nonlinear Universe*. Berlin, Heidelberg, Springer 2007

STEWART, IAN: *Hraje Bůh kostky?* Praha, Argo – Dokořán 2009

Tabulka

k	0	0	0	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,75	1,75	1,75
n															
0	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8
1	0,2	0,5	0,8	0,28	0,625	0,88	0,36	0,75	0,96	0,44	0,875	1,04	0,48	0,938	1,08
2	0,2	0,5	0,8	0,381	0,742	0,933	0,59	0,938	0,998	0,81	1,039	0,978	0,917	1,04	0,929
3	0,2	0,5	0,8	0,499	0,838	0,964	0,832	0,996	1	1,041	0,978	1,01	1,05	0,967	1,045
4	0,2	0,5	0,8	0,624	0,906	0,981	0,972	1	1	0,977	1,01	0,995	0,958	1,023	0,963
5	0,2	0,5	0,8	0,741	0,948	0,991	0,999	1	1	1,011	0,995	1,003	1,028	0,982	1,025
6	0,2	0,5	0,8	0,837	0,973	0,995	1	1	1	0,994	1,003	0,999	0,977	1,013	0,98
7	0,2	0,5	0,8	0,905	0,986	0,998	1	1	1	1,003	0,999	1,001	1,016	0,99	1,014
8	0,2	0,5	0,8	0,948	0,993	0,999	1	1	1	0,999	1,001	1	0,987	1,007	0,989
9	0,2	0,5	0,8	0,973	0,996	0,999	1	1	1	1,001	1	1	1,009	0,994	1,008
10	0,2	0,5	0,8	0,986	0,998	1	1	1	1	1	1	1	0,993	1,004	0,994
11	0,2	0,5	0,8	0,993	0,999	1	1	1	1	1	1	1	1,005	0,997	1,005
12	0,2	0,5	0,8	0,996	1	1	1	1	1	1	1	1	0,996	1,002	0,997
13	0,2	0,5	0,8	0,998	1	1	1	1	1	1	1	1	1,003	0,998	1,003
14	0,2	0,5	0,8	0,999	1	1	1	1	1	1	1	1	0,998	1,001	0,998
15	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,002	0,999	1,001
16	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999	1,001	0,999
17	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,001	0,999	1,001
18	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999	1	0,999
19	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,001	1	1
20	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
26	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
27	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28	0,2	0,5	0,8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

k	2	2	2	2,45	2,45	2,45	2,5	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	2,8	2,8	2,8
n															
0	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8
1	0,52	1	1,12	0,592	1,113	1,192	0,6	1,125	1,2	0,616	1,15	1,216	0,648	1,2	1,08
2	1,019	1	0,851	1,184	0,806	0,631	1,2	0,773	0,6	1,231	0,702	0,533	1,287	0,528	0,929
3	0,98	1	1,105	0,651	1,189	1,202	0,6	1,212	1,2	0,492	1,246	1,18	0,254	1,226	1,045
4	1,019	1	0,874	1,208	0,638	0,608	1,2	0,571	0,6	1,141	0,449	0,627	0,784	0,451	0,963
5	0,98	1	1,094	0,593	1,204	1,192	0,6	1,183	1,2	0,722	1,093	1,235	1,258	1,144	1,025
6	1,019	1	0,888	1,185	0,603	0,631	1,2	0,641	0,6	1,244	0,83	0,48	0,349	0,683	0,98
7	0,98	1	1,087	0,649	1,189	1,202	0,6	1,216	1,2	0,455	1,197	1,129	0,986	1,289	1,014
8	1,019	1	0,898	1,207	0,638	0,608	1,2	0,559	0,6	1,1	0,584	0,75	1,025	0,245	0,989
9	0,98	1	1,081	0,595	1,204	1,192	0,6	1,175	1,2	0,814	1,215	1,237	0,953	0,763	1,008
10	1,019	1	0,905	1,185	0,603	0,631	1,2	0,661	0,6	1,207	0,535	0,473	1,079	1,269	0,994
11	0,98	1	1,077	0,647	1,189	1,202	0,6	1,221	1,2	0,556	1,182	1,122	0,841	0,312	1,005
12	1,019	1	0,912	1,207	0,637	0,608	1,2	0,546	0,6	1,198	0,624	0,767	1,215	0,914	0,997
13	0,98	1	1,073	0,596	1,204	1,192	0,6	1,166	1,2	0,581	1,234	1,232	0,482	1,134	1,003
14	1,019	1	0,917	1,186	0,603	0,631	1,2	0,683	0,6	1,214	0,483	0,49	1,182	0,708	0,998
15	0,98	1	1,069	0,646	1,19	1,202	0,6	1,224	1,2	0,539	1,133	1,139	0,581	1,287	1,001
16	1,019	1	0,921	1,206	0,637	0,608	1,2	0,538	0,6	1,185	0,742	0,726	1,263	0,253	0,999
17	0,98	1	1,067	0,597	1,204	1,192	0,6	1,159	1,2	0,616	1,24	1,243	0,334	0,783	1,001
18	1,019	1	0,925	1,186	0,603	0,631	1,2	0,698	0,6	1,231	0,467	0,457	0,957	1,259	0,999
19	0,981	1	1,064	0,645	1,19	1,201	0,6	1,225	1,2	0,492	1,114	1,103	1,072	0,347	1
20	1,019	1	0,928	1,206	0,637	0,608	1,2	0,536	0,6	1,142	0,783	0,809	0,855	0,982	1
21	0,981	1	1,062	0,597	1,203	1,192	0,6	1,158	1,2	0,721	1,225	1,211	1,202	1,031	1
22	1,019	1	0,931	1,187	0,604	0,631	1,2	0,701	0,6	1,244	0,509	0,547	0,523	0,942	1
23	0,981	1	1,06	0,644	1,19	1,201	0,6	1,225	1,2	0,455	1,159	1,191	1,221	1,096	1
24	1,019	1	0,933	1,206	0,637	0,608	1,2	0,536	0,6	1,1	0,68	0,599	0,465	0,802	1
25	0,981	1	1,058	0,598	1,203	1,192	0,6	1,158	1,2	0,815	1,246	1,224	1,161	1,246	1
26	1,019	1	0,935	1,187	0,604	0,631	1,2	0,701	0,6	1,207	0,45	0,512	0,637	0,386	1
27	0,981	1	1,056	0,643	1,19	1,201	0,6	1,225	1,2	0,557	1,093	1,161	1,284	1,05	1
28	1,018	1	0,937	1,205	0,636	0,608	1,2	0,536	0,6	1,199	0,828	0,674	0,262	0,903	1