Abundantní čísla

J. Nečas

Abstract. The article discusses the relationship between the natural number and the sum of its divisors, and according to it classifies the natural numbers as deficient, perfect and abundant. This classification is applied to chains of natural numbers ordered by relation "divides".

Klíčová slova. Počet dělitelů, součet dělitelů, abundabilita, abundantní číslo, dokonalé číslo, deficientní číslo, relace "dělí".

V článku [1] jsme se zmínili o *dokonalých číslech*; **dokonalé** je takové přirozené číslo x, pro součet $S(x)$ jehož dělitelů platí $S(x) = 2x$. Vzniká při tom přirozeně otázka po tvaru množin těch přirozených čísel x, pro něž platí $S(x) > 2x$, resp. $S(x) < 2x$. Jí se věnuje tento článek, aniž by ji plně vyčerpal.

V článku bude $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ označovat množinu všech přirozených čísel (včetně nuly), $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ množinu všech kladných přirozených čísel, $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ množinu všech prvočísel a $P_L = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ množinu všech lichých prvočísel. Symbolem | budeme označovat relaci "dělí" na množině N_0 (tedy $x|y$, právě když existuje takové $q \in N_0$, že $y = x.q$), symbol ↨ bude vyjadřovat relaci "ostře dělí", tj.

$$(x \updownarrow y) \iff ((x \mid y) \;\&\; (x \neq y))$$

Pro $x \in N$ bude $T(x)$, resp. $S(x)$ označovat počet, resp. součet všech dělitelů čísla x (označení $S(x)$ jsme již použili). Binární logaritmus budeme značit lb.

Abundancí $A(x)$ čísla $x \in N$ rozumíme rozdíl $S(x) - 2x$. Číslo $x \in N$ nazýváme **abundantní**, resp. **dokonalé**, resp. **deficientní**, právě když $A(x) > 0$, resp. $A(x) = 0$, resp. $A(x) < 0$. Deficiencí $D(x)$ čísla x rozumíme číslo $-A(x)$; tedy $D(x) + A(x) = 0$ pro všechna $x \in N$.

Číslo x nazveme **bázickým abundantním číslem**, právě když $A(x) \geq 0$ a pro všechna $y \updownarrow x$ platí $A(y) < 0$. Bázické abundantní číslo nemusí být abundantním číslem; bázickými abundantními čísly jsou i všechna dokonalá čísla.

Nechť

(1) $x=(p_1\wedge n_1).(p_2\wedge n_2). \dots . (p_M\wedge n_M)$

je prvočíselný rozklad[1] čísla x ($p_1 < p_2 < \ldots < p_M$).

Pro $T(x)$ a $S(x)$ platí:

(2) $T(x) = (n_1+1).(n_2+1). \ldots . (n_M+1)$

(3) $$S(x) = \frac{(p_1\hat{}(n_1+1)-1).(p_2\hat{}(n_2+1)-1). \ldots . (p_M\hat{}(n_M+1)-1)}{(p_1-1).(p_2-1). \ldots . (p_M-1)}$$

Z těchto vyjádření je zřejmé, že pro ***nesoudělná čísla*** x a y platí

(4) $T(xy) = T(x).T(y)$

(5) $S(xy) = S(x).S(y)$

Poznamenejme, že funkce f, definovaná na nějaké podmnožině A množiny N_0, pro niž pro všechny dvojice vzájemně nesoudělných čísel $x \in A$, $y \in A$ platí

$xy \in A$, $f(xy) = f(x).f(y)$,

se nazývá **multiplikativní.** Funkce T a S tedy jsou multiplikativní.

Abundabilitou $a(x)$ čísla $x \in$ N rozumíme podíl $S(x)/x$:

$a(x) = S(x)/x$

Platí tedy:

x je abundantní <==> $a(x) > 2$,

x je dokonalé <==> $a(x) = 2$,

x je deficientní <==> $a(x) < 2$.

Abundabilita je rovněž multiplikativní funkcí a pro všechna $x \in$ N platí $a(x) \geq 1$, přičemž $a(x) = 1$, právě když $x = 1$.

Logaritmickou abundabilitou $la(x)$ rozumíme binární logaritmus abundability, tedy $la(x) = \text{lb}\,(a(x))$. Pro logaritmickou abundabilitu platí

x je abundantní <==> $la(x) > 1$,

x je dokonalé <==> $la(x) = 1$,

x je deficientní <==> $la(x) < 1$,

$la(x) \geq 0$ pro všechna $x \in$ N,

[1] Zápis $a\hat{}r$ znamená totéž jako a^r. Závorkování ve výrazu (1) tak není nutné, avšak je použito pro větší názornost.

$la(x) = 0 \quad \Longleftarrow\!\Longrightarrow \quad x = 1$.

Z multiplikativnosti abundability plyne, že pro číslo x s prvočíselným rozkladem (1) platí

$$la(x) = la(p_1\wedge n_1) + la(p_2\wedge n_2) + \ldots + la(p_M\wedge n_M)$$

Poznámka. Pojmy abundance, abundability i logaritmické abundability lze rozšířit na množinu N_0; obor hodnot těchto funkcí bychom však museli rozšířit o prvek $+\infty$; pak $A(0) = a(0) = la(0) = +\infty$. Poněvadž "číslo" $+\infty$ se vymyká běžným početním pravidlům, zůstaneme s našimi úvahami v množině N.

Ze vztahu (3) vyplývají vyjádření pro abundabilitu prvočísla a jeho mocnin:

(6) $\quad a(p) = 1 + 1/p = (p + 1)/p$

(7) $\quad a(p^k) = 1 + 1/p + 1/p^2 + \ldots + 1/p^k = (1-p^{-(k+1)}) / (1-p^{-1})$;

Díváme-li se na $a(p^k)$ jako na funkci dvou argumentů p a k, je zřejmě při pevném p rostoucí funkcí argumentu k a při pevném k klesající funkcí argumentu p. Pokud ve výrazu (7) necháme k konvergovat k nekonečnu, dostaneme konvergentní geometrickou řadu; položme

(8) $\quad a_\infty(p) = \lim_{k\to\infty} a(p^k) = 1/(1 - p^{-1}) = 1 + 1 / (p - 1) = p / (p - 1)$.

Číslo $a_\infty(p)$ nazveme **limitní abundabilitou prvočísla** p. Vzhledem k tomu, že pro každé prvočíslo p je posloupnost $(a(p^k))_{k=0,1,2,\ldots}$ rostoucí, pro všechna $p \in P$ a $k \in N_0$ je

$$a(p^k) < a_\infty(p),$$

$$a_\infty(p) = \sup_k a(p^k).$$

Limitní abundabilita $a_\infty(p)$ je klesající funkcí argumentu p na množině P,

$$a_\infty(2) = 2,$$

$$\lim_{p\to\infty; p\in P} a_\infty(p) = 1.$$

Věta 1. Nechť $x, y \in N$, $x \updownarrow y$. Pak $a(x) < a(y)$.

Věta 1 je důsledkem multiplikativnosti abundability a vztahů (6) a (7).

Důsledek. Nechť $x, y \in N$, $x \updownarrow y$. Je-li y deficientní, pak je i x deficientní. Je-li x abundantní, pak je i y abundantní.

Abundabilita mocnin prvočísel

p / *k*	1	2	3	4	5	limitní
2	1,500	1,750	1,875	1,938	1,969	2,000
3	1,333	1,444	1,481	1,494	1,498	1,500
5	1,2000	1,2400	1,2480	1,2496	1,2499	1,2500
7	1,1429	1,1633	1,1662	1,1666	1,1667	1,1667
11	1,0909	1,0992	1,0999	1,1000	1,1000	1,1000
13	1,0769	1,0828	1,0833	1,0833	1,0833	1,0833
17	1,05882	1,06228	1,06249	1,06250	1,06250	1,06250
19	1,05263	1,05540	1,05555	1,05556	1,05556	1,05556
23	1,04348	1,04537	1,04545	1,04545	1,04545	1,04545
29	1,03448	1,03567	1,03571	1,03571	1,03571	1,03571
31	1,03226	1,03330	1,03333	1,03333	1,03333	1,03333
37	1,02703	1,02776	1,02778	1,02778	1,02778	1,02778
41	1,02439	1,02499	1,02500	1,02500	1,02500	1,02500
43	1,02326	1,02380	1,02381	1,02381	1,02381	1,02381
47	1,02128	1,02173	1,02174	1,02174	1,02174	1,02174
53	1,01887	1,01922	1,01923	1,01923	1,01923	1,01923
57	1,01754	1,01785	1,01786	1,01786	1,01786	1,01786
59	1,01695	1,01724	1,01724	1,01724	1,01724	1,01724

Logaritmická abundabilita mocnin prvočísel

p \ k	1	2	3	4	5	limitní
2	0,585	0,807	0,907	0,954	0,977	1,000
3	0,415	0,531	0,567	0,579	0,583	0,585
5	0,2630	0,3103	0,3196	0,3215	0,3218	0,3219
7	0,1926	0,2182	0,2218	0,2223	0,2224	0,2224
11	0,1255	0,1364	0,1374	0,1375	0,1375	0,1375
13	0,1069	0,1148	0,1154	0,1155	0,1155	0,1155
17	0,08246	0,08717	0,08745	0,08746	0,08746	0,08746
19	0,07400	0,07779	0,07799	0,07800	0,07800	0,07800
23	0,06140	0,06401	0,06413	0,06413	0,06413	0,06413
29	0,04891	0,05057	0,05062	0,05063	0,05063	0,05063
31	0,04580	0,04726	0,04730	0,04731	0,04731	0,04731
37	0,03847	0,03950	0,03953	0,03953	0,03953	0,03953
41	0,03477	0,03560	0,03562	0,03562	0,03562	0,03562
43	0,03317	0,03393	0,03395	0,03395	0,03395	0,03395
47	0,03037	0,03101	0,03103	0,03103	0,03103	0,03103
53	0,02697	0,02747	0,02748	0,02748	0,02748	0,02748
57	0,02509	0,02553	0,02553	0,02554	0,02554	0,02554
59	0,02425	0,02466	0,02466	0,02466	0,02466	0,02466

Věta 2: Všechna čísla tvaru p^n ($p \in$ P, $n \in N_0$) jsou deficientní.

Důkaz: Ze vztahu (7) plyne, že pro všechna čísla tohoto tvaru je $a(p^n) < 2$, a tedy tato čísla jsou deficientní.

Věta 3: Čísla tvaru $2^k p$ ($k \in$ N, $p \in$ P) jsou

abundantní, pokud $k > \mathrm{lb}(p+1) - 1$,

dokonalá, pokud $k = \mathrm{lb}(p+1) - 1$,

deficientní, pokud $k < \mathrm{lb}(p+1) - 1$,

Poznámka. Číslo $\mathrm{lb}(p+1)$ je celé, právě když p je Mersenovým prvočíslem (viz [1]).

Důkaz věty 3: Použijeme symbol **o** , za nějž lze dosazovat relační symboly <, =, >. Z podmínky $a(2^k p)$ **o** 2 získáme úpravami (s využitím vztahu (7)) nerovnost 2^{k+1} **o** $p+1$, odkud logaritmováním dostaneme tvrzení věty.

Důsledek 1. Pro každé liché prvočíslo p existuje takové přirozené číslo k, že $2^k p$ je abundantní číslo.

Důsledek 2. Pro každé liché prvočíslo p existuje právě jedno takové přirozené číslo m, že $2^m p$ je bázické abundantní číslo.

Bázická abundantní čísla tvaru $2^m p$, menší než 1001, jsou 6, 20, 28, 88, 104, 272, 304, 368, 464, 496; mezi nimi jsou tři dokonalá čísla 6, 28 a 496. Poznamenejme, že v celočíselném intervalu <1; 1000> leží i další sudá bázická abundantní čísla, která nemají tvar $2^m p$, a to 70 = 2.5.7, 550 = $2.5^2.11$, 572 = $2^2.11.13$, 650 = $2.5^2.13$, 748 = $2^2.11.17$ a 836 = $2^2.11.19$.

Obraťme nyní svou pozornost k lichým abundantním číslům.

Věta 4: Každé liché abundantní číslo je dělitelné aspoň třemi prvočísly.

Důkaz: Supremum abundability lichého čísla dělitelného jen dvěma prvočísly je

$$a_\infty(3).a_\infty(5) = (3/2).(5/4) = 15/8 < 2;$$

všechna lichá čísla dělitelná jen dvěma prvočísly tedy nutně jsou deficientní.

Příklady bázických lichých abundantních čísel:

945 = 3^3*5*7 (nejmenší liché abundantní číslo);
A(945) = 30; a(945) = 2,03

1 575 = 3^2*5^2*7; A(1575) = 74 a(1 575) = 2,05

2 205 = 3^2*5*7^2; A(2 205) = 36; a(2 205) = 2,02

3 465 = $3^2*5*7*11$; A(3 465) = 558; a(3 465) = 2,16

7 425 = 3^3*5^2*11; A(7 425) = 30; a(7 425) = 2,004

15 015 = 3*5*7*11*13; A(15 015) = 2 226; a(15 015) = 2,15

81 081 = $3^4*7*11*13$; A(81 081) = 462; a(81 081) = 2,01

Ve všech těchto příkladech se v prvočíselném rozkladu vyskytuje číslo 3. Nicméně platí následující věta.

Věta 5. Nechť p_0 je libovolné liché prvočíslo. Pak existuje abundantní číslo x tvaru $x = p_0.p_1. \ldots .p_k$, kde $p_0<p_1< \ldots <p_k$.

Důkaz: Zvolme prvočísla p_j ($j > 0$) tak, aby mezi p_j a p_{j+1} neleželo žádné prvočíslo. Pro každé $m \in$ N položme $n_m = \Pi_{=0}^m p_i$. Součet $S(n_m)$ všech dělitelů čísla n_m je

$S(n_m) = \Pi_{i=0}^m (p_i+1) = \Pi_{i=0}^m p_i(1 + 1/p_i) = n_m \Pi_{i=0}^m (1 + 1/p_i)$.

Protože řada $\Sigma_{i=0}^\infty 1/p_i$ má nekonečný součet, je nekonečný i nekonečný součin $\Pi_{i=0}^\infty (1 + 1/p_i)$, a tedy nutně existuje takové číslo k, že $\Pi_{i=0}^k (1 + 1/p_i) > 2$, a tedy

$$S(n_k) = \Pi_{i=0}^{k} (p_i+1) = \Pi_{i=0}^{k} p_i(1 + 1/p_i) = n_k \Pi_{i=0}^{k} (1 + 1/p_i) > 2 n_k .$$

Můžeme tedy položit $x = n_k$.

Máme tedy neomezené možnosti vytvářet lichá abundantní čísla. Přiblíží nám je některé příklady bázických lichých abundantních čísel, nedělitelných 3:

$5^2.7.11.13.17.19.23.29 \approx 5{,}39E9$

$5.7.11.13.17.19.23.29.31 \approx 3{,}34E10$

$5^3.7^3.11^2.13.17.19.23 \approx 5{,}01E11$

$5^3.7^2.11^2.13^2.17.19.23 \approx 9{,}30E11$

$7^4.11^2.13^2.17^2.19.23.29.31.37.41.43.47.53.59.61 \approx 3{,}26\ E27$

$7^4.11.13.17.19.23.29.31.37.41.43.47.53.59.61.67 \approx 5{,}6E28$

Zkrátka, lichá abundantní čísla, navzdory tomu, že tvoří množinu stejné mohutnosti $\aleph_0$, jakou má množina N_0 všech přirozených čísel, jsou v množině N_0 velmi řídce rozložena.

Na závěr uveďme tabulku všech dokonalých a abundantních čísel, menších nebo rovných 1000. Mezi těmito 248 čísly je jediné liché číslo, a to 945. Ve sloupci "báze" u bázických čísel je uvedeno, zda jde o dokonalé číslo, popř. o jiné číslo tvaru $2^k p$ (bázické A), o jiné sudé bázické číslo (bázické B) či o liché bázické číslo (bázické C)

[1] Nečas, J. Some Remarks on Trigonal and Perfect Numbers. MS 23, 2015

RNDr. Jiří Nečas
Department of Mathematics
University of Economics
Ekonomická 957
148 00 Prague 4

e-mail: *necas@vse.cz*

Pořadí	Číslo x	Báze	Abubilita	Rel. abund.	Abundance	S(x)
1	6	Dokonalé	2,00	0,000	0	12
2	12	6	2,33	0,333	4	28
3	18	6	2,17	0,167	3	39
4	20	Bázické A	2,10	0,100	2	42
5	24	6	2,50	0,500	12	60
6	28	Dokonalé	2,00	0,000	0	56
7	30	6	2,40	0,400	12	72
8	36	6	2,53	0,528	19	91
9	40	20	2,25	0,250	10	90
10	42	6	2,29	0,286	12	96
11	48	6	2,58	0,583	28	124
12	54	6	2,22	0,222	12	120
13	56	28	2,14	0,143	8	120
14	60	6; 20	2,80	0,800	*48*	168
15	66	6	2,18	0,182	12	144
16	70	Bázické B	2,06	0,057	4	144
17	72	6	2,71	0,708	51	195
18	78	6	2,15	0,154	12	168
19	80	20	2,33	0,325	26	186
20	84	6; 28	2,67	0,667	56	224
21	88	Bázické A	2,05	0,045	4	180
22	90	6	2,60	0,600	54	234
23	96	6	2,63	0,625	60	252
24	100	20	2,17	0,170	17	217
25	102	6	2,12	0,118	12	216
26	104	Bázické A	2,02	0,019	2	210
27	108	6	2,59	0,593	64	280
28	112	28	2,50	0,500	56	280
29	114	6	2,11	0,105	12	240
30	120	6; 20	3,00	1,000	120	360
31	126	6	2,48	0,476	60	312
32	132	6	2,55	0,545	72	336
33	138	6	2,09	0,087	12	288
34	140	20;28; 70	2,40	0,400	56	336
35	144	6	2,80	0,799	115	403
36	150	6	2,48	0,480	72	372
37	156	6	2,51	0,513	80	392
38	160	20	2,36	0,363	58	378
39	162	6	2,24	0,241	39	363
40	168	6; 28	2,86	0,857	144	480
41	174	6	2,07	0,069	12	360
42	176	88	2,11	0,114	20	372
43	180	6;20	3,03	1,033	186	546
44	186	6	2,06	0,065	12	384
45	192	6	2,65	0,646	124	508
46	196	28	2,04	0,036	7	399
47	198	6	2,36	0,364	72	468
48	200	20	2,33	0,325	65	465
49	204	6	2,47	0,471	96	504
50	208	104	2,09	0,087	18	434
51	210	6; 70	2,74	0,743	156	576

52	216	6	2,78	0,778	168	600
53	220	20	2,29	0,291	64	504
54	222	6	2,05	0,054	12	456
55	224	28	2,25	0,250	56	504
56	228	6	2,46	0,456	104	560
57	234	6	2,33	0,333	78	546
58	240	6; 20	3,10	1,100	264	744
59	246	6	2,05	0,049	12	504
60	252	6; 28	2,89	0,889	224	728
61	258	6	2,05	0,047	12	528
62	260	20	2,26	0,262	68	588
63	264	0	2,73	0,727	192	720
64	270	6	2,67	0,667	180	720
65	272	Bázické A	2,05	0,051	14	558
66	276	6	2,43	0,435	120	672
67	280	20; 70	2,57	0,571	160	720
68	282	6	2,04	0,043	12	576
69	288	6	2,84	0,844	243	819
70	294	6	2,33	0,327	96	684
71	300	6; 20	2,89	0,893	268	868
72	304	Bázické A	2,04	0,039	12	620
73	306	6	2,29	0,294	90	702
74	308	28	2,18	0,182	56	672
75	312	6; 104	2,69	0,692	216	840
76	318	6	2,04	0,038	12	648
77	320	20	2,38	0,381	122	762
78	324	6	2,61	0,614	199	847
79	330	6	2,62	0,618	204	864
80	336	6; 28	2,95	0,952	320	992
81	340	20	2,22	0,224	76	756
82	342	6	2,28	0,281	96	780
83	348	6	2,41	0,414	144	840
84	350	70	2,13	0,126	44	744
85	352	88	2,15	0,148	52	756
86	354	6	2,03	0,034	12	720
87	360	6;20	3,25	1,250	450	1170
88	364	28	2,15	0,154	56	784
89	366	6	2,03	0,033	12	744
90	368	Bázické A	2,02	0,022	8	744
91	372	6	2,41	0,409	152	896
92	378	6	2,54	0,540	204	960
93	380	20	2,21	0,211	80	840
94	384	6	2,66	0,656	252	1020
95	390	6	2,58	0,585	228	1008
96	392	28	2,18	0,181	71	855
97	396	6	2,76	0,758	300	1092
98	400	20	2,40	0,403	161	961
99	402	6	2,03	0,030	12	816
100	408	6	2,65	0,647	264	1080
101	414	6	2,26	0,261	108	936
102	416	104	2,12	0,120	50	882
103	420	6; 20; 28	3,20	1,200	504	1344
104	426	6	2,03	0,028	12	864

105	432	6	2,87	0,870	376	1240
106	438	6	2,03	0,027	12	888
107	440	6; 20; 88	2,45	0,455	200	1080
108	444	6	2,40	0,396	176	1064
109	448	28	2,27	0,268	120	1016
110	450	6	2,69	0,687	309	1209
111	456	6	2,63	0,632	288	1200
112	460	20	2,19	0,191	88	1008
113	462	6	2,49	0,494	228	1152
114	464	Bázické A	2,00	0,004	2	930
115	468	6	2,72	0,722	338	1274
116	474	6	2,03	0,025	12	960
117	476	28	2,12	0,118	56	1008
118	480	6;20	3,15	1,150	552	1512
119	486	6	2,25	0,247	120	1092
120	490	70	2,09	0,094	46	1026
121	492	6	2,39	0,390	192	1176
122	496	Dokonalé	2,00	0,000	0	992
123	498	6	2,02	0,024	12	1008
124	500	20	2,18	0,184	92	1092
125	504	6; 28	3,10	1,095	552	1560
126	510	6	2,54	0,541	276	1296
127	516	6	2,39	0,388	200	1232
128	520	20	2,42	0,423	220	1260
129	522	6	2,24	0,241	126	1170
130	528	6; 88	2,82	0,818	432	1488
131	532	28	2,11	0,105	56	1120
132	534	6	2,02	0,022	12	1080
133	540	6; 20	3,11	1,111	600	1680
134	544	272	2,08	0,085	46	1134
135	546	6	2,46	0,462	252	1344
136	550	Bázické B	2,03	0,029	16	1116
137	552	6	2,61	0,609	336	1440
138	558	6	2,24	0,237	132	1248
139	560	20; 28	2,66	0,657	368	1488
140	564	6	2,38	0,383	216	1344
141	570	6	2,53	0,526	300	1440
142	572	Bázické B	2,06	0,056	32	1176
143	576	6	2,87	0,866	499	1651
144	580	20	2,17	0,172	100	1260
145	582	6	2,02	0,021	12	1176
146	588	6	2,71	0,714	420	1596
147	594	6	2,42	0,424	252	1440
148	600	6; 20	3,10	1,100	660	1860
149	606	6	2,02	0,020	12	1224
150	608	304	2,07	0,072	44	1260
151	612	6	2,68	0,676	414	1638
152	616	28; 88	2,34	0,338	208	1440
153	618	6	2,02	0,019	12	1248
154	620	20	2,17	0,168	104	1344
155	624	6; 104	2,78	0,782	488	1736
156	630	6;70	2,97	0,971	612	1872
157	636	6	2,38	0,377	240	1512

158	640	20	2,39	0,391	250	1530
159	642	6	2,02	0,019	12	1296
160	644	28	2,09	0,087	56	1344
161	648	6	2,80	0,801	519	1815
162	650	Bázické B	2,00	0,003	2	1302
163	654	6	2,02	0,02	12	1320
164	660	6; 20	3,05	1,05	696	2016
165	666	6	2,23	0,23	150	1482
166	672	6;28	3,00	1,00	672	2016
167	678	0	2,02	0,02	12	1368
168	680	20	2,38	0,38	260	1620
169	684	6	2,66	0,66	452	1820
170	690	6	2,50	0,50	348	1728
171	696	6	2,59	0,59	408	1800
172	700	20; 28; 70	2,48	0,48	336	1736
173	702	6	2,39	0,39	276	1680
174	704	88	2,16	0,16	116	1524
175	708	6	2,37	0,37	264	1680
176	714	6	2,42	0,42	300	1728
177	720	6; 20	3,36	1,36	978	2418
178	726	6	2,20	0,20	144	1596
179	728	88	2,31	0,31	224	1680
180	732	6	2,37	0,37	272	1736
181	736	368	2,05	0,05	40	1512
182	738	6	2,22	0,22	162	1638
183	740	20	2,16	0,16	116	1596
184	744	6	2,58	0,58	432	1920
185	748	Bázické B	2,02	0,02	16	1512
186	750	6	2,50	0,50	372	1872
187	756	6; 28	2,96	0,96	728	2240
188	760	20	2,37	0,37	280	1800
189	762	6	2,02	0,02	12	1536
190	768	6	2,66	0,66	508	2044
191	770	70	2,24	0,24	188	1728
192	774	6	2,22	0,22	168	1716
193	780	6; 20	3,02	1,02	792	2352
194	784	0	2,25	0,25	199	1767
195	786	6	2,02	0,02	12	1584
196	792	6; 88	2,95	0,95	756	2340
197	798	6	2,41	0,41	324	1920
198	800	20	2,44	0,44	353	1953
199	804	6	2,37	0,37	296	1904
200	810	6	2,69	0,69	558	2178
201	812	28	2,07	0,07	56	1680
202	816	6; 272	2,74	0,74	600	2232
203	820	20	2,15	0,15	124	1764
204	822	6	2,01	0,01	12	1656
205	828	6	2,64	0,64	528	2184
206	832	104	2,14	0,14	114	1778
207	834	6	2,01	0,01	12	1680
208	836	Bázické B	2,01	0,01	8	1680
209	840	6; 20; 28	3,43	1,43	1200	2880
210	846	6	2,21	0,21	180	1872

211	852	6	2,37	0,37	312	2016
212	858	6	2,35	0,35	300	2016
213	860	20	2,15	0,15	128	1848
214	864	6	2,92	0,92	792	2520
215	868	28	2,06	0,06	56	1792
216	870	6	2,48	0,48	420	2160
217	876	0	2,37	0,37	320	2072
218	880	20; 88	2,54	0,54	472	2232
219	882	6	2,52	0,52	459	2223
220	888	6	2,568	0,57	504	2280
221	894	6	2,01	0,01	12	1800
222	896	28	2,28	0,28	248	2040
223	900	6; 20	3,13	1,13	1021	2821
224	906	6	2,01	0,01	12	1824
225	910	70	2,22	0,22	196	2016
226	912	6; 304	2,72	0,72	656	2480
227	918	6	2,35	0,35	324	2160
228	920	20	2,35	0,35	320	2160
229	924	6; 28	2,91	0,91	840	2688
230	928	464	2,04	0,04	34	1890
231	930	6	2,48	0,48	444	2304
232	936	6	2,92	0,92	858	2730
233	940	20	2,14	0,14	136	2016
234	942	6	2,01	0,01	12	1896
235	945	Bázické C	2,03	0,03	30	1920
236	948	6	2,36	0,36	344	2240
237	954	6	2,21	0,21	198	2106
238	960	6;20	3,18	1,18	1128	3048
239	966	6	2,39	0,39	372	2304
240	968	88	2,06	0,06	59	1995
241	972	6	2,62	0,62	604	2548
242	978	6	2,01	0,01	12	1968
243	980	20; 28; 70	2,44	0,44	434	2394
244	984	6	2,56	0,56	552	2520
245	990	6	2,84	0,84	828	2808
246	992	496	2,03	0,03	32	2016
247	996	6	2,36	0,36	360	2352
248	1000	20	2,34	0,34	340	2340

2017, opraveno (přidán modře vyznačený text) 1.6.2024