Jedna zajímavá úloha na limitu typu ∞ – ∞

Máme vypočítat limitu

$\lim_{x\to\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$

Symbolem ch označujeme hyperbolický kosinus, ch $x = (e^x - e^{-x})/2$.

Tedy máme vypočítat

$w = \lim_{x\to\infty} (x - \ln (e^x - e^{-x})/2)$

Jde zřejmě o limitu typu ∞ – ∞.

Neurčité výrazy běžně řešíváme l'Hospitalovým pravidlem, které je ovšem určeno pro výrazy tvaru podílu. Hledejme tedy

$e^w = \lim_{x\to\infty} \left(e^x / e^{\ln (\exp x - \exp(-x))/2}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(e^x / ((e^x - e^{-x})/2)\right) =$

$= \lim_{x\to\infty} \left(2e^x / (e^x - e^{-x})\right) = 2$

(bez použití l'Hospitalova pravidla), a tedy

$\boldsymbol{w} = \lim_{x\to\infty} (x - \ln (e^x - e^{-x})/2) = \mathbf{\ln 2}$