Z obdélníka přeložením pětiúhelník

Je dán obdélník $ABCD$, $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $a < b$. Představme si, že jej máme vystřižený z papíru a přeložme jej tak, aby vrchol A splynul s vrcholem C, $A' = C$ (obr.1).

Předpokládejme, že strana CD leží na nepřeklopené části, AB na části překlopené. Vznikne tak pětiúhelník $DCB'QP$ (jinak $DA'B'QP$), kde $P \in AD$, $Q \in BC$ (obr. 2). Na části plochy pětiúhelníka (v obr. 2 jde o rovnoramenný trojúhelník PCQ) se překrývají překlopená a nepřeklopená část, na části nikoli. Nechť P_4 je obsah původního obdélníka, P_5 obsah vzniklého pětiúhelníka. Z úvahy o překrývání části nepřeklopené části s částí překlopené plyne, že

$$0{,}5.P_4 \leq P_5 \leq P_4$$

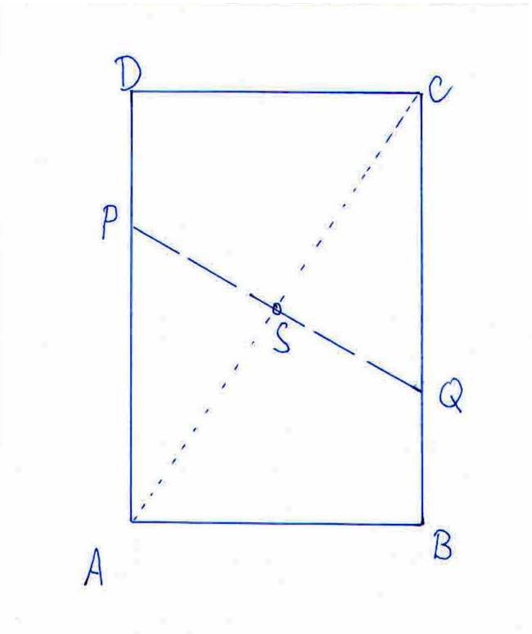
Máme dokázat, že platí dokonce silnější tvrzení:

$$0{,}5.P_4 \leq P_5 \leq \mathbf{0{,}75}.P_4$$

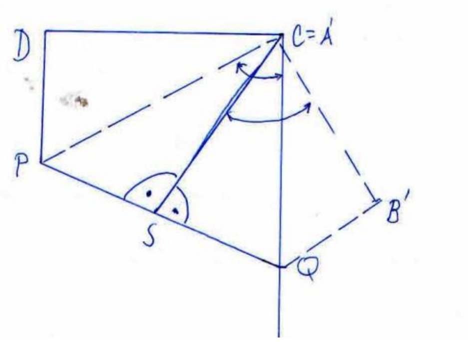
a vyjádřit P_5

a) pomocí a a b,

b) pomocí P_4 a podílu $q = a/b$ ($q < 1$)



Obr. 1



Obr. 2

Označme P_3 obsah trojúhelníka PCQ.

Z obr. 2 je vidět, že platí

$$P_5 = P_4 - P_3$$

Z obr. 1 vidíme, že výška v rovnoramenného trojúhelníka PCQ je polovina úhlopříčky výchozího obdélníka, tedy

$$v = 0{,}5.\sqrt{(a^2 + b^2)}$$

Určíme nyní poloviční délku jeho základny, tedy úsečky QS. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ABC a QSC plyne, že

$$QS = a.\mathrm{CS}/\mathrm{CB} = a.0{,}5.\sqrt{(a^2 + b^2)}/b,$$

a tedy

$$P_3 = 0{,}5.\sqrt{(a^2 + b^2)}.a.0{,}5.\sqrt{(a^2 + b^2)}/b =$$

$$= 0{,}25.(a^2 + b^2).a/b$$

Přejděme od vyjádření pomocí a, b k vyjádření prostřednictvím $P_4 = ab$ a $q = a/b$, odkud

$$a = \sqrt{(P_4.q)},\quad b = \sqrt{(P_4/q)}.$$

Pro P_3 dostaneme

$$P_3 = 0{,}25.P_4(q + 1/q).q = 0{,}25.P_4(q^2 + 1).$$

Požadovaná vyjádření pro P_5 tedy jsou

$$P_5 = P_4 - P_3 =$$

$$= ab - 0{,}25.(a^2 + b^2).a/b = 0{,}75\ ab - 0{,}25\ a^3/b$$

$$= P_4 - 0{,}25.P_4(q^2 + 1) = P_4.(1 - 0{,}25.(q^2 + 1))$$

Protože $0 < q < 1$, je

$$0{,}5 < 1 - 0{,}25.(q^2 + 1) < 0{,}75$$

a tak dokonce platí

$$0{,}5.P_4 < P_5 < 0{,}75.P_4$$

Povšimněme si, že k hodnotě $0{,}5.P_4$ se P_5 blíží, pokud $q \to 1$, tedy když výchozí obdélník se blíží k čtverci; k hodnotě $0{,}75.P_4$ se pak blíží, když $q \to 0$, tedy tím více, čím je výchozí obdélník protáhlejší.

Jiří Nečas

Praha 23.10.2024, poslední úprava 26.10.2024