Rychle k pí

Výpočet čísla π jako limity poloviny obvodu kružnici opsaných či vepsaných pravidelných k-úhelníků je poměrně jednoduchý a rychlý; k necháme probíhat jen posloupnost mocnin 2, $k = 2^{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Při ochotě počítat "manuálně" odmocniny se uvedený výpočet obejde bez tabulek, kalkulačky či počítače.

Omlouvám se však, že k výpočtům, o nichž věřím, že jsem s to je dělat "manuálně", jsem počítač použil.

a) Opsané mnohoúhelníky

Nechť $x_1 = 1$ (= tg 45°)

Nechť $x_{n+1} = x_n^{-1} (-1 + \sqrt{(1 + x_n^2)})$

Nechť $u_n = 2^{n+1} x_n$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \pi$$

u_n je poloviční obvod pravidelného opsaného 2^{n+1}-úhelníka. Rekurentní vztah

$$x_{n+1} = x_n^{-1} (-1 + \sqrt{(1 + x_n^2)})$$

vychází ze vztahu pro funkci tangens[1] polovičního úhlu pro ostré úhly:

$$\mathrm{tg}(\alpha/2) = (-1 + \sqrt{(1 + \mathrm{tg}^2\, \alpha)}) / \mathrm{tg}\, \alpha.$$

Posloupnost u_n je klesající a konverguje k π shora.

Konvergence je poměrně rychlá. V tabulce jsou vyjádření čísel u_n na 7 platných cifer; při této přesnosti se už u_{11} shoduje s číslem π = 3,1415926… ≈ 3,141593.

[1] Funkci tangens zde sice využíváme, ale jediná apriorní informace o jejích hodnotách, již využíváme, je triviální vztah tg 45° = 1.

n	x_n	u_n
1	1	4
2	0,414214	3,313708
3	0,198912	3,182598
4	0,098491	3,151725
5	0,049127	3,144118
6	0,024549	3,142224
7	0,012272	3,14175
8	0,006136	3,141632
9	0,003068	3,141603
10	0,001534	3,141595
11	0,000767	**3,141593**
12	0,000383	3,141593

a) Vepsané mnohoúhelníky

Podobně můžeme využít posloupnost polovičních obvodů *vepsaných* pravidelných 2^{n+1}-úhelníků[2]; při tom využijeme vyjádření sinu polovičního úhlu[3], a to bez použití běžného vzorce obsahujícího kosunus:

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{(1 - \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)})/2}$$

Můžeme nyní postupovat obdobně jako v případě opsaných n-úhelníků:

$y_0 = \sqrt{2}$ (délka poloviny strany vepsaného čtverce)

$y_{n+1} = \sqrt{(1 - \sqrt{(1 - \sin^2 y_n)})/2}$

$w_n = 2^{n+1}\, y_n$. (Obvod poloviny vepsaného pravidelného 2^{n+2}-úhelníka)

Platí:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \pi.$$

w_n je poloviční obvod pravidelného vepsaného 2^{n+1}-úhelníka.

Posloupnost w_n je rostoucí a konverguje k π zdola. I zde jde o konvergenci poměrně rychlou. Při vyjádření čísla π na 7 platných cifer nastane shoda u w_{12}:

---

[2] Podobně jako u opsaných i zde uvažuji pravidelné 2^k-úhelníky, i když se zde jako přirozené nabízí začít pravidelním šestiúhelníkem, délka jehož strany je stejná jako polpměr kružnice, a pak pokračovat s pravidelnými 3.2^m-úhelníky.

[3] Funkci sinus zde sice využíváme, ale jediná apriorní informace o jejích hodnotách, již využíváme, je triviální vztah sin 45° = √(1/2).

n	y_n	w_n
1	0,707107	2,828427
2	0,382683	3,061467
3	0,19509	3,121445
4	0,098017	3,136548
5	0,049068	3,140331
6	0,024541	3,141277
7	0,012272	3,141514
8	0,006136	3,141573
9	0,003068	3,141588
10	0,001534	3,141591
11	0,000767	3,141592
12	0,000383	**3,141593**
13	0,000192	3,141593

Cennou informaci pro odhad přesnosti výpočtu dostaneme z nerovnosti:

Pro všechna přirozená čísla k, m platí

$$w_k \leq \pi \leq u_m.$$

Praha 18.07.2024