Binomy $x^n + 1$

n-té odmocniny z -1

(1) $\cos \phi_k + i \sin \phi_k$,

kde

(2) $\phi_k = 180°/ n + k.360°/n$,

$k \in \{0; 1, \dots , n - 1\}$.

Hodnotu n-té odmocniny z -1, pro niž $k = 0$, nazveme **základní n-tou odmocninou z -1**

Je-li n sudé, jsou všechny n-té odmocniny z -1 imaginární a dvojice pro $k = 0$ a $k = n - 1$, $k = 1$ a $k = n - 2$, …, $k = n/2 - 1$ a $k = n/2$ jsou komplexně sdružené.

Je-li n liché, je číslo -1 jedinou reálnou n-tou odmocninou z -1 [zde $k = (n - 1)/2$]; ostatní jsou imaginární. Dvojice kořenů pro

$k = 0$ a $k = n - 1$,

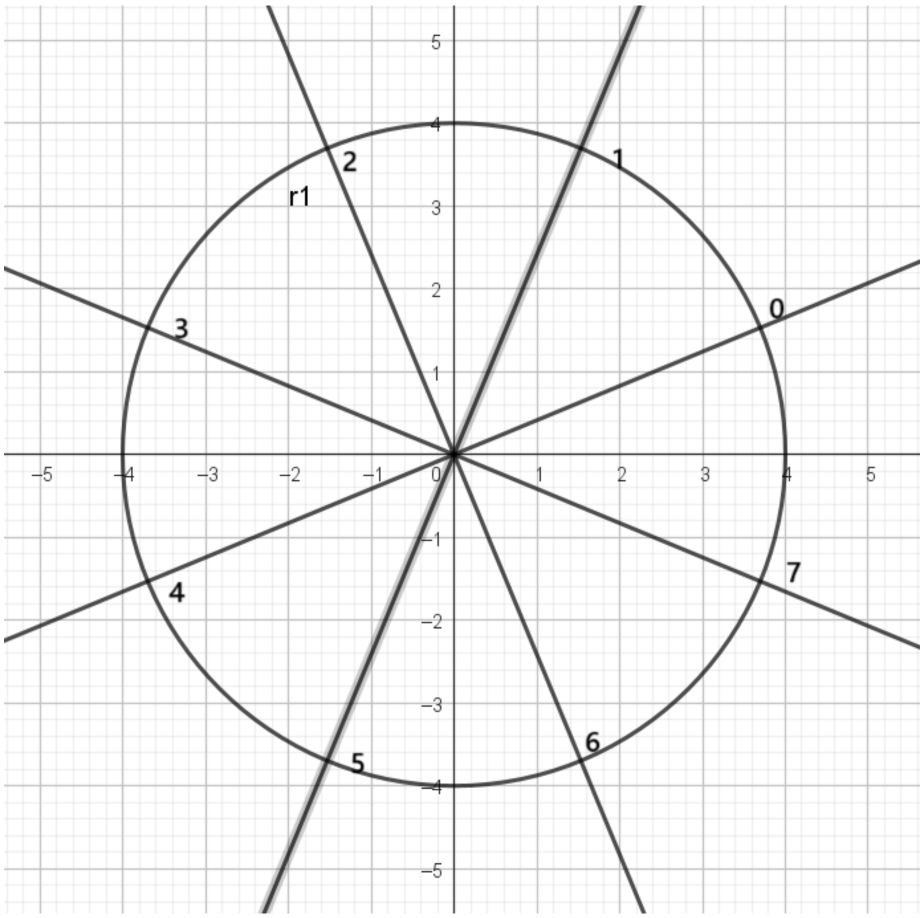
$k = 1$ a $k = n - 2$,

………………………

$k = (n - 3)/2$ a $k = (n + 1)/2$

jsou komplexně sdružené.

Rozložení n-tých odmocnin z 1 znázorňují obrázky 1, 2 a 3. Obrázek 1 ukazuje 8. odmocniny z 1 a má sloužit k ilustraci rozložení n-tých odmocnin pro n dělitelné 4.

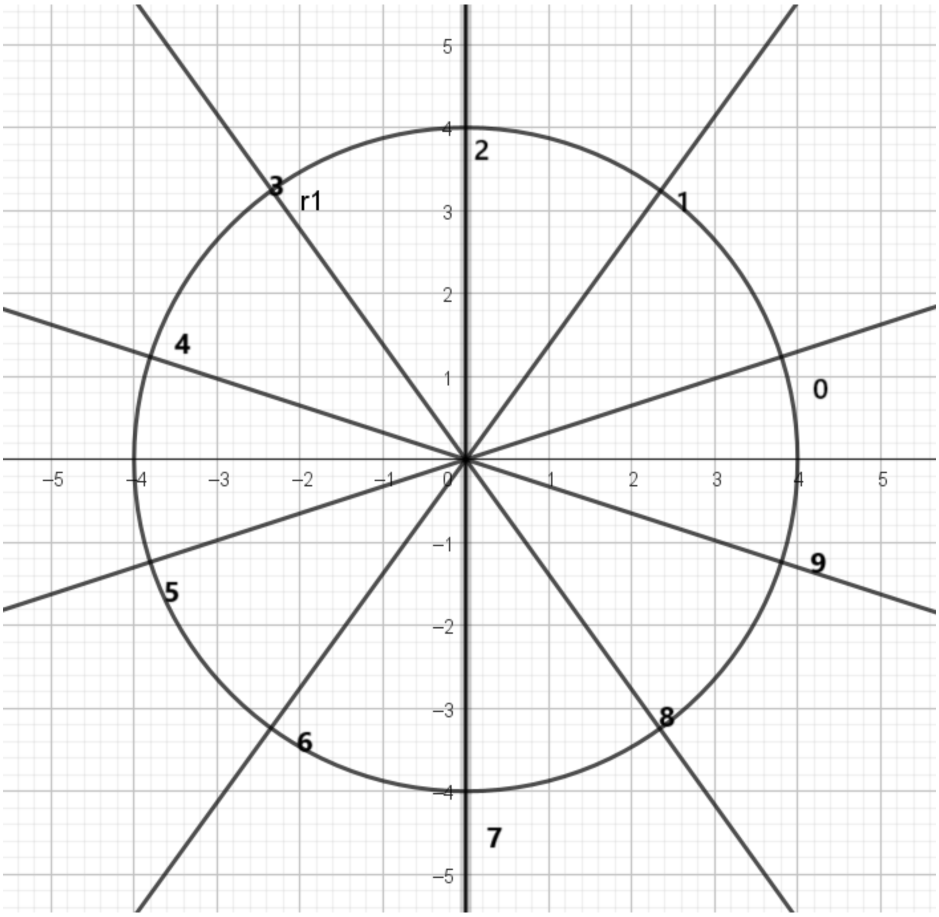


Obr. 1

Z obrázku je vidět, že v prvním kvadrantu leží odmocniny cos ϕ_k + i sin ϕ_k pro k = 0, …, $n/4 - 1$ a že všechny n-té odmocniny jsou komplexní jednotky tvaru

(3) $\pm \cos \phi_k \pm i \sin \phi_k \quad (k = 0, \ldots, n/4 - 1)$

Obrázek 2 ukazuje 10. odmocniny z 1 a má sloužit k ilustraci rozložení n-tých odmocnin pro ta sudá n, která nejsou dělitelná 4, $n = 4m + 2$. Ve zobrazovaném případě je tedy $m = 2$.



Obr. 2

Z obrázku je vidět, že uvnitř 1. kvadrantu leží odmocniny $\cos \phi_k + i \sin \phi_k$ pro $k = 0, \ldots, m - 1$ a dále že v tomto případě n-tými odmocninami jsou čísla i a -i, která leží na hranici 1. a 2., resp. 3. a 4. kvadrantu. Všechny n-té odmocniny jsou komplexní jednotky tvaru

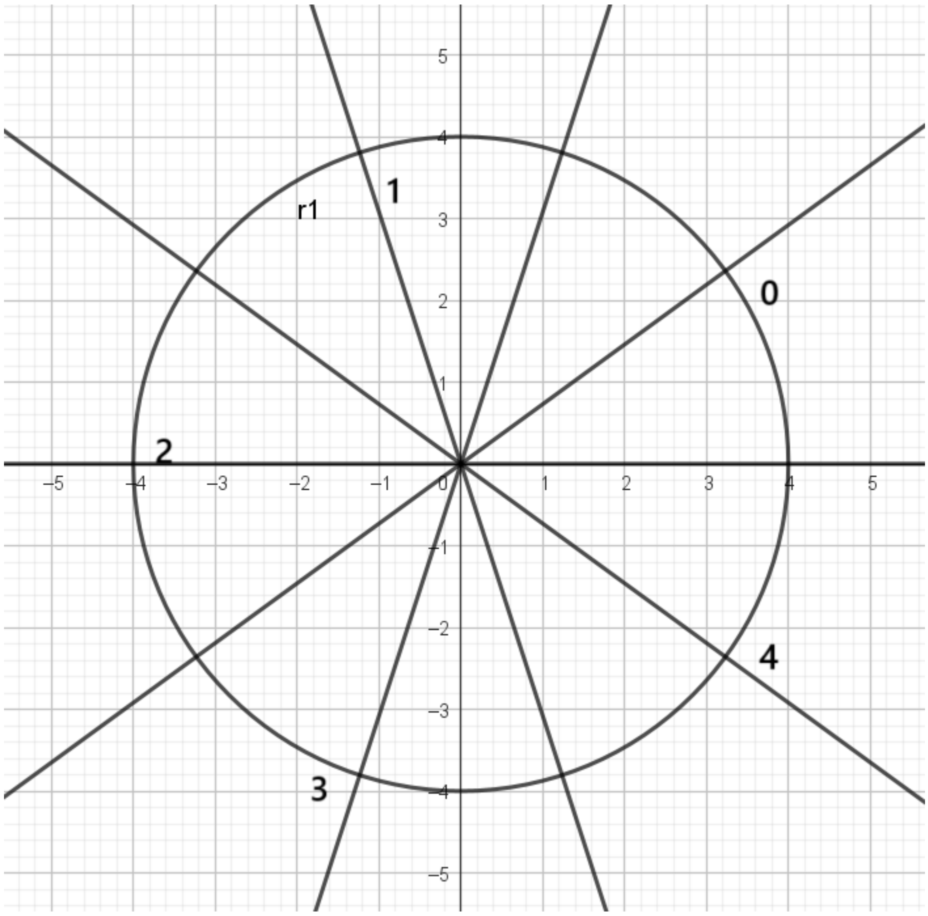
(4) $\pm \cos \phi_k \pm i \sin \phi_k \quad (k = 0, \ldots, m - 1;\ m = (n - 2)/4)$

a dále čísla

i, -i.

Obrázek 3 ukazuje 5. odmocniny z 1 a má sloužit k ilustraci rozložení n-tých odmocnin pro lichá n. V tomto případě mezi odmocninami je právě jedno reálné číslo, a to -1. Liché odmocniny z -1 tak nejsou symetricky rozloženy kolem imaginární osy. Nad reálnou osou leží odmocniny, u nichž ve vyjádření (1) je $k \leq (n-3)/2$; pro $k = (n-1)/2$ je

$$\phi_k = 180°/n + (n\text{-}1)360°/(2n) = 180°\,(1/n + (n\text{-}1)/n) = 180°\,,$$



Obr. 3

což odpovídá hodnotě odmocniny -1. Pro liché n jsou tedy všechny n-té odmocniny komplexní jednotky tvaru

(5) $\cos\ \phi_k \pm \mathrm{i} \sin \phi_k \quad (k = 0, \ldots, (n - 3)/2)$

a dále číslo

-1.

Součin kořenových činitelů s komplexně sdruženými komplexními jednotkami

(6) $$(x - (\cos\phi + i\sin\phi)) \,.\, (x - (\cos\phi - i\sin\phi)) =$$

$$= ((x - \cos\phi) + i\sin\phi) \,.\, ((x - \cos\phi) + i\sin\phi) =$$

$$= (x - \cos\phi)^2 + \sin^2\phi = \boxed{x^2 - 2\cos\phi \,.\, x + 1}$$

Jde o **reálný kvadratický trojčlen** s koeficienty 1, -2 cos ϕ, 1.

Pokud je stupeň polynomu dělitelný 4, ke každému kořenovému činiteli existuje i činitel, jehož obraz je s ním symetrický podle imaginární osy, a tak v rozkladu na činitele se s činitelem $\boxed{x^2 - 2\cos\phi \,.\, x + 1}$ vyskytuje i činitel $\boxed{x^2 + 2\cos\phi \,.\, x + 1}$.

Pokud je stupeň polynomu dělitelný 4 se zbytkem 2, ke každému kořenovému činiteli, který není ryze imaginární, existuje i činitel, jehož obraz je s ním symetrický podle imaginární osy, a tak v rozkladu na činitele se s činitelem $\boxed{x^2 - 2\cos\phi \,.\, x + 1}$ vyskytuje i činitel $\boxed{x^2 + 2\cos\phi \,.\, x + 1}$.

Rozklad binomu $x^n + 1$ tělese reálných čísel pro vybraná n

Využíváme vyjádření funkcí sinu a kosinu 60°, 90° a 108° (vrcholové úhly pravidelného trojúhelníku, čtverce a pravidelného pětiúhelníku (viz [1])), a dále úhlů z těchto vzniklých (případně opakovaným) sčítáním, odčítáním a půlením, pomocí celých čísel, tělesových operací a druhých odmocnin. Takto lze vyjádřit koeficienty u x v kvadratických činitelích tvaru (6) pro n = 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, … . Nejmenší n, pro něž to nelze, je n = 7.

$x^4 + 1 = (x^2 + x.\sqrt{2} + 1).(x^2 - x.\sqrt{2} + 1)$

$x^6 + 1 = (x^2 + x.\sqrt{3} + 1).(x^2 - x.\sqrt{3} + 1).(x^2 + 1)$

$x^8 + 1 = (x^2 + x.\sqrt{(2+\sqrt{2})} + 1).(x^2 - x.\sqrt{(2+\sqrt{2})} + 1).$
$.(x^2 + x.\sqrt{(2-\sqrt{2})} + 1).(x^2 - x.\sqrt{(2-\sqrt{2})} + 1)$

$x^{10} + 1 = (x^2 - x.\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}/2 + 1).(x^2 - x.\sqrt{(5 - \sqrt{5})}/\sqrt{2} + 1).$
$(x^2 + x.\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}/2 + 1).(x^2 + x.\sqrt{(5 - \sqrt{5})}/\sqrt{2} + 1).(x^2 + 1).$

$x^3 + 1 = (x^2 - x + 1).(x + 1)$

$x^5 + 1 = [x^2 - 0{,}5(1+\sqrt{5})x + 1].[x^2 - 0{,}5(1-\sqrt{5})x + 1].(x + 1)$

$x^7 + 1 = (x^2 + ax + 1).(x^2 + bx + 1).(x^2 + cx + 1).(x + 1),$

kde a, b, c jsou kořeny rovnice[1] $\eta^3 + \eta^2 - 2\eta - 3 = 0$

Koeficienty a, b, c nelze v tomto případě pomocí celých čísel, tělesových operací a odmocniny vyjádřit.

Rozklad binomu $x^n + 1$ v tělese reálných čísel

Označme

$$\phi_k = 180°/ n + k.360°/n$$

a) n sudé, dělitelné 4; $n = 4m$ (využíváme vztah (3))

$$(x^n + 1) = \prod_{k=0}^{m-1} (x^2 - 2 \cos \phi_k . x + 1).(x^2 + 2 \cos \phi_k . x + 1)$$

b) n sudé, nedělitelné 4; $n = 4m + 2$ (využíváme vztah (4))

$$(x^n + 1) = (x^2 + 1).\prod_{k=0}^{m-1} (x^2 - 2 \cos \phi_k . x + 1).(x^2 + 2 \cos \phi_k . x + 1)$$

[1] Je známo, že $x^7 + 1 = (x + 1).(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$; pro sedmičlen $(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ hledáme rozklad ve tvaru $(x^2 + ax + 1).(x^2 + bx + 1).(x^2 + cx + 1)$; roznásobením zjistíme, že koeficienty a, b, c jsou kořeny rovnice $\eta^3 + \eta^2 - 2\eta - 3 = 0$.

c) n liché; $n = 2m + 1$ (využíváme vztah (5))

$$(x^n + 1) = (x + 1).\prod_{k=0}^{m-1} \left(x^2 - 2\cos\phi_k . x + 1\right).$$

Odkaz na literaturu:

[1] Nečas, J.: Magická krása pravidelného pětiúhelníka. Mundus Symbolicus, *25*, 2017

Praha **30.9.2024**

Poslední úprava: **9.10.2024**