Vypočítejme ještě jednu limitu, tentokrát s parametrem.

Parametr označíme c a budeme požadovat, aby $c > 0$

A proměnnou pro změnu neoznačíme x, nýbrž h.

Počítejme limitu:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(c+h)} - \sqrt{c}}{h} = \mathbf{L}$$

Dosadili-li bychom $h = 0$, bude v čitateli i ve jmenovateli 0, a tak nám nezbývá než limitu počítat. Budeme si počínat obdobně jako posledně, když jsme počítali limitu rozdílu odmocnin; zlomek rozšíříme součtem

$\sqrt{(c+h)} + \sqrt{c}$; tedy

$$\mathbf{L} = \lim_{h\to 0} \frac{[\sqrt{(c+h)} - \sqrt{c}][\sqrt{(c+h)} + \sqrt{c}]}{h.[\sqrt{(c+h)} + \sqrt{c}]} = \frac{(c+h) - c}{h.[\sqrt{(c+h)} + \sqrt{c}]} =$$

$$= \frac{h}{h.[\sqrt{(c+h)} + \sqrt{c}]} = \frac{1}{\sqrt{(c+h)} + \sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

Předposlední rovnost: krátili jsme proměnnou h

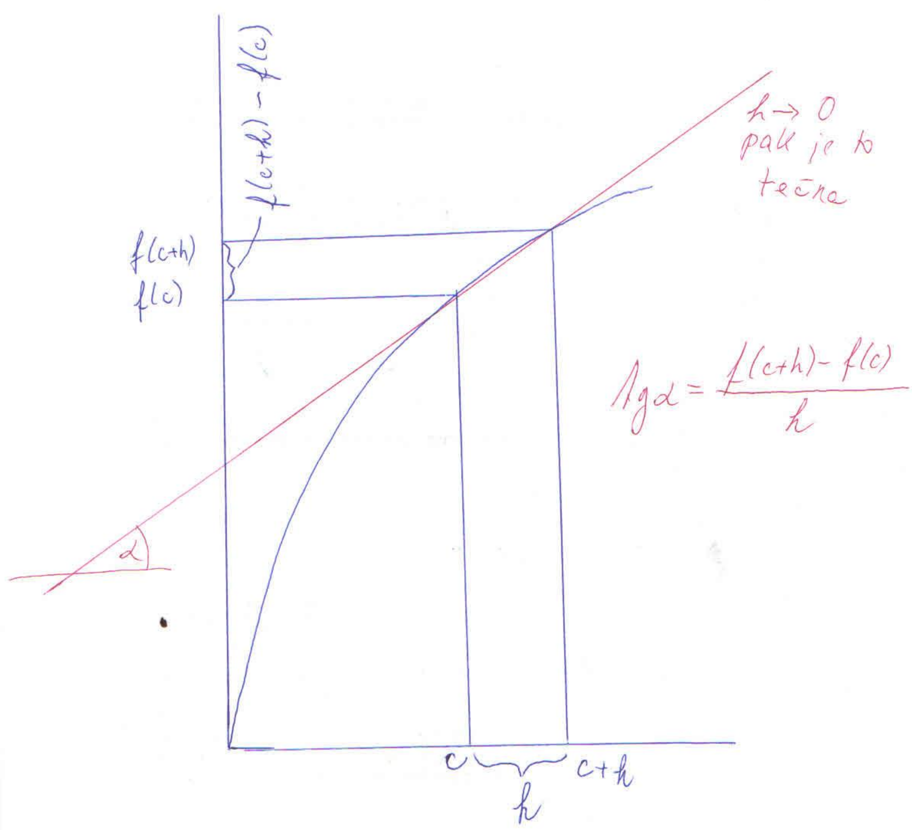
Poslední rovnost: Zde šlo dosadit $h = 0$

Geometrická interpretace je na obr. 7.1.1

Věcná interpretace: Tato limita ukazuje rychlost, s jakou se mění hodnota funkce "odmocnina" v závislosti na hodnotě proměnné, kterou jsme označili c (považovali jsme ji při výpočtu limity za konstantu, ale touto konstantou může být libovolné kladné číslo, tedy libovolné číslo z vnitřku definičního oboru $\langle 0; +\infty)$ odmocniny (tj. nikoli hraniční hodnota $x = 0$). Vypočítali jsme <u>*derivaci odmocniny*</u>.

<u>*Fyzikální interpretace derivace*</u>:

Derivace dráhy podle času je okamžitá rychlost.
Derivace rychlosti podle času (tedy druhá derivace dráhy) je zrychlení.
Derivace mechanické práce podle času je výkon.



Obr. 7.1.1

Derivací funkce f ve vnitřním bodě c jejího definičního oboru rozumíme (oboustrannou) limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Pro $f(x) = \sqrt{x}$ dostaneme před chvílí počítanou limitu.

Za c tedy dosazujeme libovolný vnitřní bod x z definičního oboru funkce f, a tak z funkce f odvodíme novou funkci, kterou označíme f' – je to ***derivace funkce*** f.

Právě jsme si odvodili "vzorec" pro derivaci odmocniny. Ten je ovšem zahrnut v obecnějším vzorci pro n-tou mocninu (n = 0,5). Odvozovat si takový vzorec pro všechny elementární funkce by bylo docela pracné, to se dělá třeba na Matfyzu; my přijmeme vzorce tak, jak jsou v učebnici v oddíle 4.1 (2019: str. 105; 2013: str. 99). Vám nezbývá, než se je naučit. Pár poznámek k nim:

a) $\mathcal{D}$(arcsin) = ⟨-1; 1⟩ - uzavřený interval; pro jeho derivaci platí:
$\mathcal{D}$ $(1/\sqrt{(1-x^2)})$ = (-1; 1) - otevřený interval
Pozor však: logaritmus je definován jen pro kladné hodnoty argumentu; výraz pro jeho derivaci má smysl pro všechny nenulové hodnoty argumentu – při řešení příkladů bývá dobré si uvědomit, že – pokud jde o derivaci logaritmu – zajímají nás jen kladná x

b) Derivace funkcí ln a cyklometrických, tedy začínajících arc-, je vyjádřena algebraickým výrazem, zatímco exponenciála a goniometrické funkce nikoli

c) Vzorec pro derivaci funkcí tg, cotg můžeme snadno odvodit pomocí pravidla pro derivování podílu, derivace a^x se dá odvodit s použitím pravidla pro derivaci složené funkce.

Derivace je lineární operace, tedy pro funkce f a g a konstantu (tj. číslo) a platí

$(f + g)' = f' + g'$

$(f - g)' = f' - g'$

$(af)' = a.f'$

Pro součin a podíl funkcí platí složitější vztahy. Než se jim budete věnovat, vypočítejte si z učebnice z kap. 4 úlohy 1 a, c, f, g

Derivace součinu

$(f.g)' = f'.g + f.g'$

Příklad

$(x^2.\sin x)' = 2x.\sin x + x^2.\cos x$

Derivace převrácené hodnoty

$(1/g)' = -g'/g^2$

Příklad

$(1/e^x)' = - e^x/(e^x)^2 = -1/e^x$

Derivace podílu

$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$

Příklad
Připomínám, že derivací sinu je kosinus a derivací kosinu "minus sinus"

$\operatorname{tg} x = (\sin x \,/\, \cos x\,)' = (\cos x.\cos x - \sin x.(-\sin x))/\cos^2 x =$

$(\cos^2 x + \sin^2 x)/\cos^2 x \;=\; 1/\cos^2 x$

Teď můžete řešit ostatní úlohy ze cvičení 1

Dále už rezignuji na snahu rozlišovat v matematickém textu stojaté písmo a kurzívu, omlouvám se za to.

Derivace složené funkce

Co je složená funkce?
Podívejme se na funkci
$y = f(x) = \sin x^2$

Výpočet hodnot funkce f se skládá ze dvou kroků:

$x \to x^2$ (druhá mocnina – "vnitřní funkce")

$x^2 \to \sin x^2$ (sinus – "vnější" funkce)

Derivace složené funkce je rovna součinu derivací jednotlivých funkcí.

Derivace druhé mocniny (x^2) je dvojnásobek ($2x$)

Derivace sinu je kosinus; pozor, argumentem sinu zde není x, nýbrž x^2.

Tedy
$f'(x) = (\sin x^2)' = \cos x^2 \,.\, 2x = 2x \cos x^2$

Pro porovnání derivujme

$(\sin x)^2 = \sin^2 x$ (to je rovnocenný zápis téhož)
Vnitřní funkce sinus; její derivace: kosinus
Vnější funkce: druhá mocnina; její derivace: dvojnásobek

$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \,.\, \cos x = \sin 2x$

Poslední úprava už nesouvisí s derivováním, jde o použití goniometrického vztahu pro sinus dvojnásobného argumentu
Počítejme derivaci funkce ln(5x)

$(\ln(5x))' = (1/5x).5 = 1/x = (\ln x)'$

Možná je to na první pohled překvapení: Derivace ln(5x) je stejná jako derivace ln x. Uvědomme si však, že ln (5x) = ln 5 + ln x, tedy funkce ln (5x) a ln x se liší o konstantu (ln 5); dvě funkce, které se liší o konstantu, mají stejnou derivaci, neboť derivace konstanty je 0.

A teď si uvedeme ještě podobný, ale zajímavější příklad. Počítejme derivaci funkce f(x) = arctg (-1/x). V poznámkách *cv06-2* jsme počítali limity této funkce v krajních bodech jejího definičního oboru.

U příkladů na výpočet derivace se zpravidla definičním oborem nezabýváme s tím, že vypočítáme derivaci pro všechny vnitřní body definičního oboru derivované funkce

Vnitřní funkce: -1/x;
pro její derivaci platí $(-1/x)' = (-x^{-1})' = -(-1.x^{-2}) = 1/x^2$

Vnější funkce: arctg

$$\text{Tedy } f'(x) = \frac{1}{1 + (-1/x)^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(Poslední rovnost je záležitostí algebraické úpravy. Udělejte si ji podrobněji.)

Vychází nám f'(x) = (arctg x)'. Při tom: $\mathcal{D}(f) \neq \mathcal{D}(\text{arctg})$; arctg je definován pro všechna reálná čísla, naše funkce f není definována pro nulu. A nemůžeme tvrdit, že by se tam, kde jsou obě funkce definovány, se lišily o konstantu. Využijme k tomu výpočet limit funkce f v krajních bodech jejího definičního oboru, viz *cv06-2*.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x\to-\infty} \text{arctg } x = -\pi/2$
$\lim_{x\to0-} f(x) = \pi/2$	$\lim_{x\to0} \text{arctg } x = 0$
$\lim_{x\to0+} f(x) = -\pi/2$	$\lim_{x\to0} \text{arctg } x = 0$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x\to\infty} \text{arctg } x = \pi/2$

U funkce arctg, která je v 0 spojitá, jsou limity v 0 zprava i zleva stejné a jsou rovny funkční hodnotě.

Derivace funkcí f a arctg jsou stejné. Jejich rozdíl by měl být konstantní. On konstantní je, avšak *nikoli na celém společném definičním oboru*, jímž je "děravá" množina (-∞, 0) ∪ (0, ∞), nýbrž *na každé jeho souvislé části*; na intervalu (-∞, 0) je

f(x) - arctg x = π/2,

zatímco na intervalu (0, ∞) je

f(x) - arctg x = -π/2.

Lze říci, že informace, kterou nám derivace dá, nedosáhne za "díru v definičním oboru", týká se jen intervalu, nikoli sjednocení intervalů.

Počítání derivací je mechanická záležitost. Není to nic moc záživného, nelze nějak sofistikovaně dělat zkoušku, avšak nevyžaduje to přemýšlení – důležitá však je pozornost (neudělat chybu).

V příštím textu (snad výrazně kratším) se ještě k počítání derivace složené funkce vrátíme.