4-1 (12/03/2020)

Jednotková matice je taková čtvercová matice řádu n (řád čtvrecové matice je počet řádků, stejný jako počet sloupců), že pro každou čtvercovou matici **A** řádu n platí **J.A = A.J = A**

Jednotková matice má v hlavní diagonále samé jedničky a jinde samé nuly

Jednotková matice řádu 4:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Inverzní matice k čtvercové matici **A** je taková matice **X,** pro niž platí **A.X=J** Používáme pro ni označení $\mathbf{A}^{-1}$, tedy $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}$

Matice se svou inverzí maticí komutuje:

$$\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{J}$$

Matice **A** a $\mathbf{A}^{-1}$ mají stejný řád.

Výpočet inverzní matice vychází z Jordanovy metody; pro matice řádu n znamená podmínka **A.X=J** celkem n^2 lineárních rovnic, tedy pro $n > 2$ by to už bylo docela nepříjemné. Metodu výpočtu pro matici řádu 3, vycházející z Jordanovy metody (aniž bychom si oněch 9 rovnic psali) si ukážeme dále.

Označme n řád matice a h její hodnost.

Inverzní matice existuje právě k těm čtvercovým maticím, pro něž $h = n$. Tyto matice se nazývají **regulárními**. Pokud je $h < n$,matice je **singulární** a inverzní matice k ní neexistuje

Pojmy **regulární, singulární matice** zavádíme jen pro *čtvercové* matice

<u>Výpočet inverzní matice</u>

Invertovat matici $\mathbf{A} = \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{matrix}$

K matici zprava připojíme jednotkovou matici. Elementárními úpravami převedeme levou polovinu této "dvojmatice" na jednotkovou; vpravo pak dostaneme matici inverzní

Výpočet

1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**2**	**3**	**0**	**1**	**0**
1	**3**	**6**	**0**	**0**	**1**

Další krok

1	1	1	1	0	0
0	1	2	-1	1	0
0	2	5	-1	0	1
Další krok					
1	1	1	1	0	0
0	1	2	-1	1	0
0	0	1	1	-2	1
Další krok					
1	1	0	0	2	-1
0	1	0	-3	5	-2
0	0	1	1	-2	1

Poslední krok

1	**0**	**0**	**3**	**-3**	**1**
0	**1**	**0**	**-3**	**5**	**-2**
0	**0**	**1**	**1**	**-2**	**1**

Dostáváme tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{matrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}$$

Stojí za povšímnutí: Inverzní matice k symetrické matici je symetrická

Inverzní matice k maticím řádu 2 lze počítat jednodušeji.

Nechť $\mathbf{B} = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

Pak $\mathbf{B}^{-1} = (1/(ad - bc)) \begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix}$

Tedy: Prvky v hlavní diagonále prohodíme, u prvků ve vedlejší diagonále změním znaménko, a to vše vydělíme rozdílem ad - bc (to je determinant matice **B** - o tom více později)

Příklad:

$\mathbf{B} = \begin{matrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

Protože 7.1 - 2.3 = 1, je $\mathbf{B}^{-1} = \begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{matrix}$

Příklad:

$\mathbf{C} = \begin{matrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

Protože 4.1 - 2.3 = -2, je $\mathbf{C}^{-1} = \begin{matrix} (-1/2).1 & (-1/2)(-2) \\ (-1/2)(-3) & (-1/2).4 \end{matrix} =$

$= \begin{matrix} -1/2 & 1 \\ 3/2 & -2 \end{matrix}$

Dělejte si vždy zkoušku, že součin matice a matice k ní inverzní je jednotková matice